

Inleiding Logica

Inleveropdrachten 2

Werkgroep 1

October 3, 2013

Ik (Rijk) heb verbeteringen in rood vermeld. Deze verbeteringen meegenomen zijn dit correcte uitwerkingen van de tweede inleveropgaven.

Inductie hoofdstuk 2

2.1.5 b

Inductieve definitie van de verzameling FOR”

- (i) $p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$ zijn elementen van FOR”
- (ii) $\top$ is een element van FOR”
- (iii) Als A een element van FOR” is, dan ook $\neg A$
- (iv) Als A en B elementen van FOR” zijn, dan ook: $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A|B)$

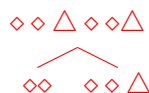
2.3.4

NB. Bij deze opgave ga ik ervan uit dat er geen lege string, ε mogelijk is, omdat deze ook niet gedefinieerd is in de inductieve definitie in regel i, ii, iii ~~of iv~~.

Er is maar een boom mogelijk als we naar de gehele formule kijken. Regel i kunnen we niet toepassen omdat in deze regel maar een element staat. Regel ii kunnen we niet toepassen omdat deze vereist dat er helemaal rechts twee driehoekjes staan en in onze formule is dat er maar een. Ook het tweede deel van regel ii kun je niet toepassen omdat die vereist dat er aan beide buitenkanten van de formule een diamantje staat en dat is in onze formule niet het geval. Regel iii is dus de enige die je kan toepassen en zoals hierna gedemonstreerd zal worden, loopt die boom vast. Deze formule is dus geen blurps.

De boom loopt vast na het toepassen van regel iii. Je houdt voor x twee diamantjes over. Regel i kun je hier niet op toepassen omdat deze regel geen diamantje bevat. Regel ii kun je niet toepassen omdat er in deze regel

tussen de twee diamantjes nog twee elementen moeten. Dit is niet het geval en zoals eerder gezegd is een lege string niet mogelijk. Regel iii kun je niet toepassen omdat hier ook geen diamantjes in voorkomen. Bij y hou je twee diamantjes en een driehoekje over. Regel i kun je hier niet op toepassen omdat dat maar n element bevat. Regel ii kun je niet toepassen omdat de ene regel twee driehoekjes bevat in plaats van een en omdat de andere regel vereist dat er twee elementen tussen de diamantjes instaan en dat is niet het geval omdat de lege string niet mogelijk is. Regel iii kun je niet toepassen omdat daar geen diamantjes in voorkomen en omdat deze vereist dat het driehoekje in het midden staat, wat niet het geval is. De boom loopt dus vast.



Inductie hoofdstuk 3

3.1.7 (i)

$$\begin{aligned} \#(((p_0 \wedge p_0) \vee (p_0 \wedge p_0))) &= 1 + \#((p_0 \wedge p_0)) + \#((p_0 \wedge p_0)) + 1 = \\ 2 + 1 + \#(p_0) + \#(p_0) + 1 + 1 + \#(p_0) + \#(p_0) + 1 &= \\ 6 + 0 + 0 + 0 + 0 &= 6 \end{aligned}$$

De volgende regels zijn per stap gebruikt: iv, iv (op beide delen tegelijk), i (op beide delen tegelijk)

Propositie hoofdstuk 4

2.v

De waarheidstafel is als volgt:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

De gehele formule kan zowel waar als onwaar zijn en is dus contingent.

2.vi

De waarheidstafel is als volgt:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

De gehele formule is altijd waar en is dus een tautologie.

2.vii

De waarheidstafel is als volgt:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q)$	$((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q))$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

De gehele formule kan zowel waar als onwaar zijn en is dus contingent.

5.iv

Gegeven: p is waar, s, t en u zijn onwaar.

$((t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u) \leftrightarrow p \leftrightarrow t$

Om de waarheidswaarde van de gehele formule te bepalen construeren we een regel uit de waarheidstafel met de gegeven waarheidswaarden van t, s, u en p.

t	s	u	p	$t \leftrightarrow s$	$\neg u$	$(t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u$	$((t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u) \leftrightarrow p$	$((t \leftrightarrow s) \leftrightarrow \neg u) \leftrightarrow p \leftrightarrow t$
0	0	0	1	1	1	1	1	0

Uit de laatste kolom volgt dat gegeven de waarheidswaarden van t, s, u en p zoals hierboven beschreven de gehele formule onwaar is.

6.vi

Deze formule is, gegeven dat p waar is, altijd onwaar. Ik zal dit eerst uitleggen en vervolgens ook nog laten zien met behulp van een waarheidstafel. Een implicatie is onwaar als de aanname waar is en de conclusie onwaar. Aangezien aan de ene kant van het en-teken q staat en aan de andere kant $\neg q$ is de conclusie, q of $\neg q$ in ieder geval aan een kant altijd waar en de andere kant onwaar. Dat betekent dat aan een kant van het en-teken de implicatie altijd onwaar is, gegeven dat p altijd waar is. Omdat conjunctie alleen waar is als de delen allebei waar of allebei onwaar zijn, is deze formule dus altijd onwaar zoals ook volgt uit de waarheidstafel.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0

7.i

Als $A \rightarrow B$ een contradictie is, dan moet A altijd waar zijn en B altijd

onwaar. Er is namelijk maar een geval waarin implicatie onwaar is en dat is wanneer de aanname, A, waar is en de conclusie, B, onwaar.

Practicum propositie hoofdstuk 4

4.iii

De afbeelding van de waarheidstafel is te vinden in de bijlage, afbeelding 1. De kolom waar een grote pijl onderstaat is de kolom die uiteindelijk de waarheidswaarde van de gehele formule aangeeft. Deze staat onder het hoofdconnectief.

4.v

De afbeelding van de waarheidstafel is te vinden in de bijlage, afbeelding 2. De kolom waar een grote pijl onderstaat is de kolom die uiteindelijk de waarheidswaarde van de gehele formule aangeeft. Deze staat onder het hoofdconnectief.

De tweede opdracht uit het practicum was de volgende:

”Maak een formule A waarin p,q en r voorkomen (minimaal een keer, maar mogelijk meerdere keren) zodanig dat A waar is dan en slechts dan als er van de waarheidswaarden van p,q,r er precies een even aantal 1 is.”

De eerste stap die ik heb ondernomen was het construeren van een waarheidstafel met daarin de atomaire proposities en de gehele formule die, omdat deze nog onbekend was, ik A heb genoemd. Deze zag er als volgt uit:

p	q	r	A
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

De makkelijkste manier om een formule hierbij te maken is door de vier situaties waarin A waar is te formuleren, gescheiden door het connectief 'of'.

Dit gaf de volgende (gigantische) formule:

$$(((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge r)) \vee (((p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)))$$

Afbeelding 3 van de bijlage geeft in twee delen de waarheidstafel van deze lange formule weer. Ik heb deze hieronder handmatig samengevoegd. Het eerste deel heb ik daarbij voor het gemak A genoemd en het tweede deel B. Waarbij dus geldt: $A = (((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge r))$ en $B = (((p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r))$

A	B	$A \vee B$
1	0	1
0	0	0
0	0	0
1	0	1
0	0	0
0	1	1
0	1	1
0	0	0

De uiteindelijke waarheidswaarden van deze samengestelde formule komt overeen met de waarheidswaarden zoals beschreven in de eisen van de opdracht.

Het is zeer waarschijnlijk dat deze formule korter kan. Wat me gelijk opviel was dat de waarheidswaarden van r in de gevallen dat A waar is een patroon vertonen dat heel erg lijkt op de waarheidstafel van bi-implicatie. Nu moet dit nog in verband gebracht worden met p en q . Als p q bi-impliceert geeft dat precies de omgekeerde waarden van r . Dit leidt tot de uiteindelijke formule $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r)$

De waarheidstafel die bewijst dat deze formule correct is staat in de bijlage onder afbeelding 4. De kolom met de pijl eronder geeft de uiteindelijke waarheidswaarden van de gehele formule aan. Deze waarheidswaarden voldoen aan de waarheidswaarden zoals beschreven in de eisen van de opdracht.

Bijlage

1

p	q	r	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



2

p	q	r	$((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \leftrightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \vee (\neg r \rightarrow \neg p))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



p	q	r	$(((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge r))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

deel A



p	q	r	$((p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

deel B



4

p	q	r	$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



p	q	r	$((p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

4

p	q	r	$((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0