Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

Blad 1

naam en voorletters: P.W.M. Rijbroek
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 13-12-1991

tentamen: Inleiding Logica (II)

datum: 07-11-2013

studierichting: Wiskunde

reg
col

cijfer:

jaar/groep:

1) M_{xy}: x is moeder van y

S_x: x is een schurk

V_{xy}: x is vader van y

L_x: x is een lijkschouwer

B_{xy}: x is bevriend met y

H_{xy}: x haat y.

D_x: x is detective.

a: Jane Rizzoli

b: Maura Isles

c: Vince Korsak

d: Barry Frost

e: Frankie Rizzoli

f: Constance Isles

g: Paddy Doyle

h: Tommi Rizzoli.

i: Angela Rizzoli

a) $((M_{ia} \wedge M_{ih}) \wedge \neg M_{fb})$ 2

b) Elke schurk is vader van een lijkschouwer ⟺ ∀x (als x een schurk ~~x is een schurk~~ is, is hij vader van een lijkschouwer) ⟺

∀x (Als S_x, dan $\exists_y (V_{xy} \wedge L_y)$) ⟺

4 $\forall x (S_x \rightarrow \exists y (V_{xy} \wedge L_y))$.

c) Sommige lijkschouwers zijn bevriend met Jane Rizzoli maar zijn niet met iedereen bevriend

⟺ ∃x (x is lijkschouwer en x is bevriend met Jane Rizzoli maar is niet met iedereen bevriend)

⟺ ∃x (($L_x \wedge V_{xa}) \wedge \neg \forall y$ (x is bevriend met y)).

4 ⟺ $\exists x ((L_x \wedge V_{xa}) \wedge \neg \forall y V_{xy})$

d) Elke detective is bevriend met een lijkschouwer die bevriend is met elke detective ⟺

∀x (als x detective is, dan is x bevriend met een lijkschouwer die bevriend is met elke detective) ⟺

∀x (D_x → er is een lijkschouwer met wie x bevriend is ~~bevriend met x~~ die bevriend is met alle detectives) ⟺

4 ∀x (D_x → ∃y ($L_y \wedge V_{xy} \wedge$ ∀z (als z detective is, is y bevriend met z))) ⟺

$\forall x (D_x \rightarrow \exists y (L_y \wedge V_{xy} \wedge \forall z (D_z \rightarrow V_{yz})))$

e) Er is een schurk die elke detective die niet bevriend is met een lijkschouwer haat ⟺

∃x (x is een schurk en haat elke detective die niet bevriend is met een lijkschouwer) ⟺

∃x (S_x ∧ ∀y (als y detective en y is niet bevriend met een lijkschouwer, dan haat x y) ⟺

∃x (S_x ∧ ∀y (D_y ∧ ∀z (y is niet bevriend met lijkschouwer z) → x haat y)) ⟺

$\exists x (Sx \wedge (\forall y ((Dy \wedge \forall z (Lz \to \neg Vyz)) \to Hxy)))$ f 6

2) Regels:

(i) Ieder n-plaatsig predikaatatoom (zoals Px, Qxz, Rxy) zijn formules

(ii) als A formule, dan $\neg A$ formule

(iii) als A en B formules, dan $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ook formules.

(iv) als A formule, dan $\forall x A$ en $\exists x A$ ook formules.

De kleine Romeinse cijfers in de bomen verwijzen naar de op dat moment gebruikte regel.

a) Lange label:

$\exists x (Rxz \wedge \neg \forall y \forall z (Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz)))$

| (iv)

$(Rxz \wedge \neg \forall y \forall z (Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz)))$

/ (iii) \

Rxz (i) $\quad \neg \forall y \forall z (Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz))$

| (ii)

$\forall y \forall z (Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz))$

| (iv)

$\forall z (Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz))$

| (iv)

$(Qxy \to \exists x (Qxy \vee Rxz))$

/ (iii) \

Qxy (i) $\quad \exists x (Qxy \vee Rxz)$

| (iv)

$(Qxy \vee Rxz)$

/ (iii) \

Qxy (i) $\quad Rxz$ (i).

Korte label:

$\exists x$

| (iv)

$\wedge$

/ (iii) \

Rxz (i) $\quad \neg$

| (ii)

$\forall y$

| (iv)

$\forall z$

| (iv)

$\to$

/ (iii) \

Qxy (i) $\quad \exists x$

| (iv)

$\vee$

/ (iii) \

Qxy (i) $\quad Rxz$ (i).

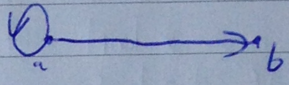
5 f

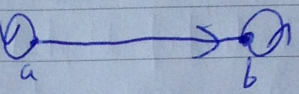
b) $\exists x (R x z \wedge \neg \boxed{\forall y} \forall z (Q x \boxed{y} \to \underline{\exists x} (Q \underline{x} \boxed{y} \vee R \underline{x} z)))$

Alle kwantoren zijn gemarkeerd op een unieke manier. Ieder voorkomen van een variabele die gebonden wordt door een kwantor is op dezelfde manier gemarkeerd als de desbetreffende kwantor.

5

3) a) Laat $M = \langle D, I_1 \rangle$, met $D = \{a, b\}$ en $I_1(P) = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle\}$.
Laat $N = \langle D, I_2 \rangle$, met $D = \{a, b\}$ en $I_2(P) = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,b \rangle\}$.

Dan ziet M er in pijldiagram als volgt uit: 

En ziet N er als volgt uit: 

waarheid van A met semantische regels: (zie blad 2 voor gebruikte regels)

$M, f \models A \Leftrightarrow M, f \models \forall x (Pxx \to \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx)) \overset{sem \forall}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (M, f[x:d] \models Pxx \to \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$

$\overset{sem \to}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (M, f[x:d] \models \neg Pxx$ of ~~voor alle d~~ $M, f[x:d] \models \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$

$\overset{sem \exists}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (M, f[x:d] \models \neg Pxx$ of er is $e \in D (M, f[x:d][y:e] \models Pxy \wedge \neg Pyx))$

$\overset{sem \wedge}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (M, f[x:d] \models \neg Pxx$ of er is $e \in D (M, f[x:d][y:e] \models Pxy$ en $M, f[x:d][y:e] \models \neg Pyx))$

$\overset{sem \neg}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (M, f[x:d] \not\models Pxx$ of er is $e \in D (M, f[x:d][y:e] \models Pxy$ en $M, f[x:d][y:e] \not\models Pyx))$

$\overset{Sem\ at.}{\Leftrightarrow}$ voor alle $d \in D (\langle [x]_{M,f[x:d]}, [x]_{M,f[x:d]} \rangle \notin I(P)$ of er is $e \in D (\langle [x]_{M,f[x:d][y:e]}, [y]_{M,f[x:d][y:e]} \rangle \in I(P)$
en $\langle [y]_{M,f[x:d][y:e]}, [x]_{M,f[x:d][y:e]} \rangle \notin I(P)$

$\Leftrightarrow$ voor alle $d \in D (\langle d,d \rangle \notin I_1(P)$ of er is $e \in D (\langle d,e \rangle \in I_1(P)$ en $\langle e,d \rangle \notin I_1(P)$. at. I in v. I_1

Op ~~an~~ de zelfde manier kan dit uitgeschreven worden bij N (simpelweg N invullen i.p.v. M).
Als we invullen $d := a$, dan in M: $\langle a,a \rangle \in I_1(P)$, dus moet gelden dat er $e \in D$ is: $\langle d,e \rangle \in I_1(P)$ en $\langle e,d \rangle \notin I_1(P)$. Stel nu $e := b$, dan $\langle a,b \rangle \in I_1(P)$ en $\langle b,a \rangle \notin I_1(P)$, dus dan klopt A in M.
Stel $d := b$, dan in M: $\langle b,b \rangle \notin I_1(P)$, en dus klopt ook dan A in M. Dus $M, f \models A$.
Als we weer invullen $d := a$, dan kan in N hetzelfde truckje toegepast worden als in M, en dus is A dan waar.
Als we echter $d := b$ invullen, zien we $\langle b,b \rangle \in I_2(P)$, maar als $e := b$, dan $\langle d,e \rangle \in I_2(P)$ en $\langle e,d \rangle \in I_2(P)$, dus dat kan niet. Maar ook: als $e := a$, dan $\langle b,a \rangle \notin I_2(P)$ en $\langle a,b \rangle \in I_2(P)$
dus dan is A ook niet waar.
Dus N maakt A niet ~~waar~~ waar en M wel.

8

b) B zegt dat er twee punten x en y zijn zodat er een ~~direct~~ pad van x naar y loopt, maar geen ~~direct~~ pad terug. Verder zegt B dat voor ieder tweetal punten x en y geldt dat er, als ~~er~~ er een ~~direct~~ pad loopt van x naar y, er een punt z is zodanig dat er een pad van x naar z loopt en een pad van z naar y. MODEL VERGETEN

3

c) Stel M is een eindig model met n punten dat C waar maakt. Dan loopt er van ieder punt x een pad naar een punt $y \neq x$ volgens conditie 1 en 3.

Er loopt dus vanuit iedere x een pad naar een punt y. Vanuit die y loopt er weer een pad naar een punt z. Uit conditie 2 volgt dat er dus een pad loopt vanuit x naar z. Stel er zou een pad van y naar x lopen. uit conditie 2 volgt dat er een pad van x naar x loopt, wat in tegenspraak is met conditie 3, dus dat kan niet. Vanuit z loopt er een pad naar w, vanuit x naar z, dus met conditie 2 vanuit x naar w. Inductief dit geheel toepassen en we zien op een gegeven moment dat er een pad loopt van x naar iedere v, van y naar iedere v behalve x, van z naar iedere v behalve x en y, etc. Dan is er een punt u waar vanuit ieder punt (conditie 1) een pad naartoe loopt. Er loopt echter ook een pad uit u naar een ander punt, zeg punt t. Dan Put, maar ook Ptu, dus uit conditie 2 volgt Puu, maar uit 3 volgt $\neg Puu$. ↯.

5

Conditie 1: $\forall x \exists y Pxy$

Conditie 2: $\forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \to Pxz)$

Conditie 3: $\forall x \neg Pxx$

Dus ~~M kan niet eindig zijn, dus C is~~ kan geen eindig model zijn, dus heeft C geen eindige modellen. □

4) a)

$\forall x \forall y (Pxy \wedge Qxy)$ ∀E
$\forall y (Pxy \wedge Qxy)$ ∀E
$Pxy \wedge Qxy$ ∧E
Pxy ∀I
$\forall y Pxy$ ∀I
$\forall x \forall y Pxy$

$\forall x \forall y (Pxy \wedge Qxy)$ ∀E
$\forall y (Pxy \wedge Qxy)$ ∀E
$Pxy \wedge Qxy$ ∧E
Qxy ∀I
$\forall y Qxy$ ∀I
$\forall x \forall y Qxy$ ∨I

$\forall x \forall y Pxy \vee \forall x \forall y Qxy$

4

b)

$[Px \wedge Qx]^1$ ∧E
Px

$\forall x (Px \to (Qx \to Rx))$ ∀E
$Px \to (Qx \to Rx)$

$Qx \to Rx$ →E

$[Px \wedge Qx]^1$ ∧E
Qx

Rx →E
$(Px \wedge Qx) \to Rx$ →I,1
$\forall x ((Px \wedge Qx) \to Rx)$ ∀I

4

Blad 2

naam en voorletters: P.W.M. Rijbroek
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 03-12-1991

reg. n
colleg

tentamen: 07-11-2013

datum: Inleiding logica

cijfer:

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

studierichting: Wiskunde

jaar/groep:

Semantische regels

Sem $O_{(i)}$: $M,f \models Pt_1t_2\ldots t_n \Leftrightarrow \langle [t_1]_{M,f}, \ldots, [t_n]_{M,f} \rangle \in I(P)$

~~Sem $O_{(ii)}$: $M,f \models Px \Leftrightarrow [x]_{M,f} \in I(P)$~~

Sem$\forall$: $M,f \models \forall x A \Leftrightarrow$ voor alle $d \in D$ ($M,f[x:d] \models A$)

Sem$\to$: $M,f \models A \to B \Leftrightarrow M,f \models \neg A$ of $M,f \models B$

Sem$\exists$: $M,f \models \exists x A \Leftrightarrow$ er is $d \in D$ ($M,f[x:d] \models A$)

Sem$\wedge$: $M,f \models A \wedge B \Leftrightarrow M,f \models A$ en $M,f \models B$

Sem$\neg$: $M,f \models \neg A \Leftrightarrow M,f \not\models A$

Sem $O_{(i)}$: $M,f \not\models Pt_1\ldots t_n \Leftrightarrow \langle [t_1]_{M,f}, \ldots, [t_n]_{M,f} \rangle \notin I(P)$

4) a)

~~$\exists x(Px \vee Qx)$ $\quad$ $\exists xPx \vee \exists xQx$ $\exists E,1$~~

$\exists xPx \vee \exists xQx$

c)

$$\dfrac{\exists x(Px\vee Qx) \quad \dfrac{[Px\vee Qx]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[Px]^2}{\exists xPx}\exists I}{\exists xPx\vee\exists xQx}\vee I \quad \dfrac{\dfrac{[Qx]^3}{\exists xQx}\exists I}{\exists xPx\vee \exists xQx}\vee I}{\exists xPx\vee\exists xQx}\vee E,2,3}{\exists xPx\vee\exists xQx}\exists E,1$$

6

IJ UIT WEL GEEN V ?

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\exists yPxy}{\exists yPuy}\forall E \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\exists yPxy}{\exists yPuy}\forall E \quad \dfrac{\dfrac{[Puv]^1 \quad [Puw]^2}{Puv\wedge Puw}\wedge I}{\exists w(Puv\wedge Puw)}\exists I}{\exists w(Puv\wedge Puw)}\exists E,2}{\exists v\exists w(Puv\wedge Puw)}\exists I}{\exists v\exists w(Puv\wedge Puw)}\exists E,1}{\forall u\exists v\exists w(Puv\wedge Puw)}\forall I$$

VOORDEEL TWIJFEL

5

e) Eén bewijs is als volgt

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Px]^1}{Px\vee Qx}\vee I}{Px\to(Px\vee Qx)}\to I,1,*.}{\forall x(Px\to(Px\vee Qx))}\forall I$$

De * markeert het punt waar we iets in kunnen voegen. Zie volgende pagina.

$$\cfrac{\cfrac{[P_x]^2 \qquad \cfrac{\cfrac{[P_x]^1}{P_x \vee Q_x}\,\vee I}{P_x \to (P_x \vee Q_x)}\,\to I, 1, *.}{P_x \vee Q_x}\,\to E}{\cfrac{P_x \to (P_x \vee Q_x)}{\forall x (P_x \to (P_x \vee Q_x))}\,\forall I}\,\to I, 2.$$

Wederom markeert de ster waar we iets in kunnen voegen. Dit kunnen we oneindig vaak doen.
Hieronder, ~~tussen~~ na ~~de~~ twee blauwe zinnen in ~~een~~ het bewijs, in het zwart wat we oneindig vaak kunnen invoegen:

~~Q_x~~

5

$$\cfrac{[P_x]^1 \qquad \cfrac{\cfrac{P_x}{\cancel{P_x \vee Q_x}\ P_x \vee Q_x}\,\vee I}{P_x \to (P_x \vee Q_x)}\,\to I}{\cancel{P_x}\ P_x \vee Q_x}\,\to E, 1$$

Er ~~zijn~~ zijn voor deze stelling dus oneindig veel bewijzen.

5) a) De correctheidsstelling zegt dat ~~$\forall$~~ $A \models B$ als $A \vdash B$, oftewel $(A \vdash B) \Rightarrow (A \models B)$.
(7) Met contrapositie gebruik je dan de correctheidsstelling om niet-bewijsbaarheid aan te tonen, door te laten zien dat de stelling semantisch onwaar is. ~~Als~~
De contrapositie houdt hier in: $(A \not\models B \to A \nvdash B)$.

b) Zij ons domein $D = \mathbb{Z}$, zij ~~$\forall$~~ P_{xy}: $x+y=0$.
Dan $\forall_x \exists_y P_{xy}$ is waar, want voor een willekeurige x, kies $y=-x$, dan $x+y = x+(-x) = x-x = 0$.
(6) Maar $\exists_y \forall_x P_{xy}$ is niet waar, want stel ~~k~~ $y := k$ zou voldoen, dan geldt voor een zekere ℓ dat $k+\ell=0$, maar ook $k+(\ell+1)=0$, dus $0 = k+(\ell+1)-(k+\ell) = k-k+\ell-\ell+1 = 1$ ↯.
Dus $\forall_x \exists_y P_{xy} \not\models \exists_y \forall_x P_{xy}$, en met de contrapositie van de correctheidsstelling volgt nu dat $\forall_x \exists_y P_{xy} \nvdash \exists_y \forall_x P_{xy}$.

c)

$$\cfrac{\cfrac{\exists_x P_x \qquad \cfrac{\cfrac{[P_y]^1 \quad [P_y]^1}{P_y \wedge P_y}\,\wedge I}{P_y}\,\wedge E}{P_y}\,\exists E, 1}{\forall_x P_x}\,\forall I$$

(7) In de conclusie bij de $\exists$-eliminatie zien we dat y voorkomt als vrije variabele.
Dat mag niet, want in de (~~dan~~ ingetrokken) aannamen P_y kunnen we schrijven als $P_x[x:=y]$. Hier mag y dus niet vrij voorkomen in de ~~de~~ conclusie van $\exists_x P_x$, want dan ~~hebben~~ is ~~we conclusies die~~ ~~zouden~~ ~~altijd voor~~ y niet meer willekeurig gekozen, wat wel ~~dus~~ behoort te gebeuren voor een existentie-eliminatie.

4

2) d) Zoals het nu gedefinieerd is, kunnen we precies zien welke voorkomens van een variabele worden gebonden door een kwantor.
Dit kunnen we niet zien als we ~~het~~ kwantorvoorkomen definiëren als de plek in de formule, omdat deze niet alle latere voorkomens van z'n variabele hoeft te binden.
Verder ~~kan~~ dit tellen vrij lang duren in heel grote formules.

c) voorkomen 1: $\underline{\exists x}(R\cancel{xy}xz \wedge \neg\forall y\forall z(Qxy \rightarrow \exists x(Qxy \vee Rxz)))$
voorkomen 2: $\overline{\exists x}(Qxy \vee Rxz)$