Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: J.A.M. Maas
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 11-08-1992

tentamen: Inleiding logica

datum: 07-11-2013

studierichting: Wisk. & Toep.

re
co

jaar/groep: WG 1

cijfer:

1

Vertaalsleutel:

D = {Jane Rizzoli, Maura Isles, Angela Rizzoli, Vince Korzak, Barry Frost, Frankie Rizzoli, Constance Isles, Paddy Doyle, Tommi Rizzoli}

Mxy: x is de moeder van y   Vxy: x is de vader van y

Sx: x is een schurk

Lx: x is een lijkschouwer

Bxy: x is bevriend met y

Dx: x is een detective

Hxy: x haat y

j: Jane Rizzoli

m: Maura Isles

a: Angela Rizzoli

v: Vince Korzak

b: Barry Frost

f: Frankie Rizzoli

c: Constance Isles

p: Paddy Doyle

t: Tommi Rizzoli

a $((Maj \wedge Mat) \wedge \neg Mcm)$ 2

b $\forall x (Sx \rightarrow (\exists y(Ly \wedge Vxy)))$ 4

c $\exists x ((Lx \wedge Bxj) \wedge \neg \forall y Bxy)$ 4

d Vertaling in stappen:

$\forall x$ (Dx → (x is bevriend met een lijkschouwer die bevriend is met elke detective))

$\forall x$ (Dx → $\exists y$ ((Ly ∧ (y is bevriend met elke detective)) ∧ Bxy))

$\forall x (Dx \rightarrow \exists y ((Ly \wedge \forall z (Dz \rightarrow Byz)) \wedge Bxy))$. 4

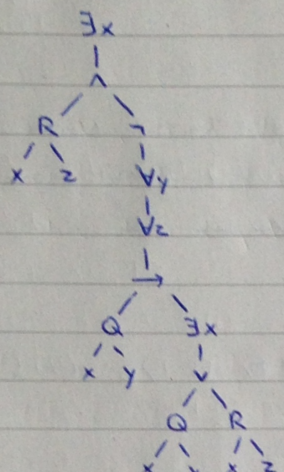
e Vertaling in stappen:

$\exists x$ (Sx ∧ (x haat elke detective die niet bevriend is met een lijkschouwer))

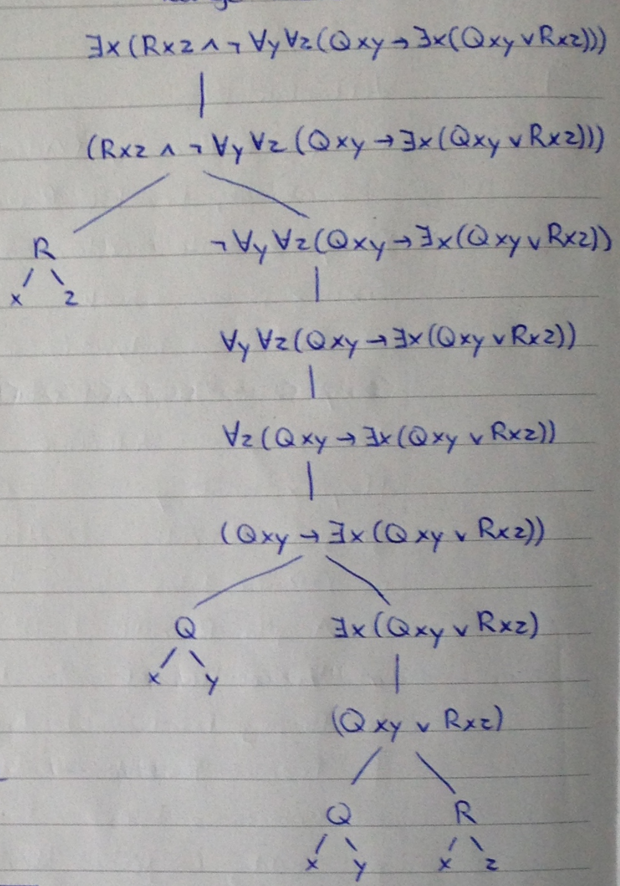
$\exists x$ (Sx ∧ $\forall y$ (als y detective is en niet bevriend met een lijkschouwer, dan Hxy))

$\exists x (Sx \wedge \forall y ((Dy \wedge \neg \exists z (Lz \wedge Byz)) \rightarrow Hxy))$. 6

2 a Korte labels:



Lange labels:



5

b We zullen met streepjes aangeven welke kwantor voorkomens welke variabele voorkomens binden:

$\exists x(Rxz \wedge \neg \forall y \forall z(Qxy \rightarrow \exists x(Qxy \vee Rxz)))$

5

c $(\varepsilon, \exists x)$ en $(121112, \exists x)$. 5

d Het cijfer 10 is afhankelijk van hoe je telt: telt $\forall y$ als 1 of als 2? Bovendien zijn vaak notationele conventies wat betreft haakjes van toepassing, wat het ook lastiger maakt. Bij hele lange formules raak je ook sneller de tel kwijt dan wanneer de voorkomens in termen van de ontleedboom gedefinieerd zijn.

2

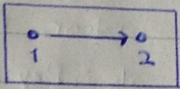
BINDING

3 a $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2\}$

$I(P) = \{\langle 1,2 \rangle\}$

Pijldiagram:

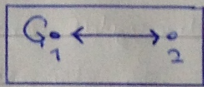


$\mathcal{N} = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2\}$

$I(P) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$

Pijldiagram:



$\mathcal{M}, f \models \forall x (Pxx \to \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$

$\iff$ (sem $\forall$) voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models (Pxx \to \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$

$\iff$ (sem $\to$) voor alle $d \in D$, ($\mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx$ of $\mathcal{M}, f[x:d] \models \exists x (Pxy \wedge \neg Pyx)$)

$\iff$ (sem $\exists$) voor alle $d \in D$, ($\mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx$ of er is een $e \in D$ zodat $\mathcal{M}, f[x:d][y:e] \models (Pxy \wedge \neg Pyx)$)

$\iff$ (sem $\wedge$) voor alle $d \in D$, ($\mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx$ of er is een $e \in D$ zodat ($\mathcal{M}, f[x:d][y:e] \models Pxy$ en $\mathcal{M}, f[x:d][y:e] \models \neg Pyx$))

f

$\iff$ (sem $\neg$) voor alle $d \in D$, ($\mathcal{M}, f[x:d] \not\models Pxx$ of er is een $e \in D$ zodat ($\mathcal{M}, f[x:d][y:e] \models Pxy$ en $\mathcal{M}, f[x:d][y:e] \not\models Pyx$))

$\iff$ (sem 0) voor alle $d \in D$, ($\langle f[x:d](x), f[x:d](x) \rangle \notin I(P)$ of er is een $e \in D$ zodat ($\langle f[x:d][y:e](x), f[x:d][y:e](y) \rangle \in I(P)$ en $\langle f[x:d][y:e](y), f[x:d][y:e](x) \rangle \notin I(P)$))

8

$\iff$ voor alle $d \in D$, ($\langle d,d \rangle \notin I(P)$ of er is een $e \in D$ zodat ($\langle d,e \rangle \in I(P)$ en $\langle e,d \rangle \notin I(P)$))

Beschouw het model $\mathcal{M}$. We zien dat er geen enkele $d \in D$ is zodat $\langle d, d \rangle \in I(R)$, dus geldt voor alle $d \in D$ dat $\langle d, d \rangle \notin I(R)$. Dit is voldoende om aan te tonen dat het model de uitspraak waar maakt.

f

Voor $\mathcal{N}, g \models \forall x (Pxx \to \exists y (Pxy \wedge \neg Pyx))$ geldt dezelfde redenering met de semantische regels als net bij $\mathcal{M}, f$. We zien echter dat in dit model niet geldt dat voor alle $d \in D$, $\langle d,d \rangle \notin I(P)$, want $\langle 1,1 \rangle \in I(P)$. Nu moeten we nagaan of er voor alle $d \in D$ een $e \in D$ is zodat $\langle d,e \rangle \in I(P)$ en $\langle e,d \rangle \notin I(P)$. Neem het element 1 voor d. We hebben nu twee opties voor $e \in D$ zodat $\langle 1,e \rangle \in I(P)$, want $\langle 1,1 \rangle \in I(P)$ en $\langle 1,2 \rangle \in I(P)$. In beide gevallen geldt echter dat $\langle e,1 \rangle \in I(P)$, namelijk $\langle 1,1 \rangle \in I(P)$ en $\langle 2,1 \rangle \in I(P)$. Deze d voldoet dus niet aan de voorwaarden, dus het geldt niet voor alle d, dus het model $\mathfrak{N}$ maakt de uitspraak niet waar.

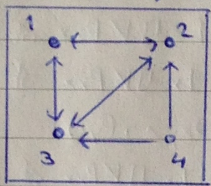
b Er zijn elementen x en y zodat "Pxy" geldt, maar niet "Pyx". Bovendien geldt voor alle elementen x en y waarvoor "Pxy" geldt, dat er een element z is zodat zowel "Pxz" als "Pzy" geldt.

$\mathfrak{M} = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$I(P) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

5



DIT WERKT MAAR IS NIET MINIMAAL

c Omdat $\forall x \exists y Pxy$ geldt, vertrekt er een pijl vanuit elk element in het pijldiagram. Bovendien gaat er vanuit geen enkel element een pijl naar zichzelf, omdat $\forall x \neg Pxx$ geldt. Als we een eindig model zouden hebben, komen hier sowieso 'dubbele pijlen' in voor (probeer maar met bijv. drie elementen). Als er een dubbele pijl is, dus van een element naar een ander element en ook andersom, moet er ook een pijl van ieder van deze elementen naar zichzelf zijn volgens $\forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz)$, maar dit kan niet. Conclusie: C heeft geen eindige moddllen.

3

Universiteit Utrecht

Faculteit Geesteswetenschappen

naam en voorletters: J.A.M. Maas
(indien gehuwd, meisjesnaam)

geb. datum: 11-08-1992

reg
coll

tentamen: Inleiding logica

datum: 07-11-2013

studierichting: Wisk. & Toep.

jaar/groep: WG1

cijfer:

4

a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(Pxy\wedge Qxy)}{\forall y(Pvy\wedge Qvy)}\forall E}{Pvw\wedge Qvw}\forall E}{Pvw}\wedge E}{\forall y\, Pvy}\forall I}{\forall x\forall y\, Pxy}\forall I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y(Pxy\wedge Qxy)}{\forall y(Pvy\wedge Qvy)}\forall E}{Pvw\wedge Qvw}\forall E}{Qvw}\wedge E}{\forall y\, Qvy}\forall I}{\forall x\forall y\, Qxy}\forall I}{\forall x\forall y\, Pxy \wedge \forall x\forall y\, Qxy}\wedge I$$

4

b

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Py\wedge Qy]^1}{Qy}\wedge E \qquad \dfrac{\dfrac{[Py\wedge Qy]^1}{Py}\wedge E \qquad \dfrac{\forall x(Px\to(Qx\to Rx))}{(Py\to(Qy\to Ry))}\forall E}{Qy\to Ry}\to E}{\dfrac{Ry}{((Py\wedge Qy)\to Ry)}\to I_1}\to E}{\forall x\,((Px\wedge Qx)\to Rx)}\forall I$$

4

c

$$\dfrac{\exists x(Px\vee Qx) \qquad \dfrac{[Py\vee Qy]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^2}{\exists x Px}\exists I}{\exists x Px\vee \exists v Qx}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{[Qy]^2}{\exists x Qx}\exists I}{\exists x Px\vee \exists x Qx}\vee I}{\exists x Px\vee\exists x Qx}\vee E_2}{\exists x Px\vee\exists x Qx}\exists E_1$$

6

d

DIT MOET OOK DEZELFDE VARIABELE ZIJN.

y != v

5

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\exists y Pxy}{\exists y Psy}\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\exists y Pxy}{\exists y Pvy}\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Psy]^1 \quad [Pvz]^2}{Psy\wedge Pvz}}{\exists w(Psy\wedge Pvw)}\exists I}{\exists v\exists w(Psv\wedge Pvw)}\exists I}{\forall u\exists v\exists w(Puv\wedge Pvw)}\forall I}{\forall u\exists v\exists w(Puv\wedge Pvw)}\exists E_2}{\forall u\exists v\exists w(Puv\wedge Pvw)}\exists E_1$$

e

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Py]^1}{(Py \vee Qy)}}{(Py \to (Py \vee Qy))}\ {\to}I1}{\forall x\,(Px \to (Px \vee Qx))}\ \forall I$$

NA, UND ...

5 a Correctheidsstelling: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$.

f

6

Met behulp van contrapositie kan hiermee niet-bewijsbaarheid worden aangetoond: $\Gamma \nvDash A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$. Dus als we aantonen dat $\Gamma \nvDash A$, dan hebben we ook aangetoond dat $\Gamma \nvdash A$. ooo

b Vanwege de correctheidsstelling is het voldoende om aan te tonen dat $\forall x \exists y Pxy \nvDash \exists x \forall y Pxy$.

6

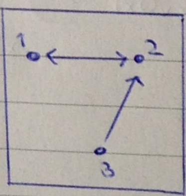
Beschouw het model $\mathcal{M}$ van signatuur Σ:

$\Sigma = \langle \{P\}, \emptyset, ar \rangle$, $ar(P) = 2$

$\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$

$D = \{1, 2, 3\}$

$I(P) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$



We zien dat er voor alle $d \in D$ een $e \in D$ is zodat Pde (er is een vertrekkende pijl vanuit elk element in het pijldiagram). Het model maakt de uitspraak $\forall x \exists y Pxy$ dus waar. Er is echter geen $d \in D$ zodat voor alle $e \in D$ geldt Pde. Er is namelijk überhaupt geen aankomende pijl in het element 3. Het model maakt de uitspraak $\exists x \forall y Pxy$ dus niet waar.

Hieruit kunnen we concluderen dat $\forall x \exists y Pxy \nvDash \exists x \forall y Pxy$ en dus dat $\forall x \exists y Pxy \nvdash \exists x \forall y Pxy$.

c Bij de $\exists$-eliminatie ontstaat de nieuwe hypothese "P_y", waarbij y als een willekeurig individu beschouwd wordt. De conclusie van de $\exists$-eliminatie is P_y, maar y was een willekeurig individu. Er wordt dus een concrete uitspraak gedaan over een willekeurig individu, en dat mag niet.

7