

Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

28 oktober, 2013

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Complex Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Een model van Signatuur Σ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar D een *niet-leeg* domain is en I de interpretatiefunctie.

I kent aan de constanten van de signatuur objecten uit het domein toe.



Universiteit Utrecht

Interpretatie van Predikaatsymbolen 2

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Stel $\text{ar}(P) = n$, dan is $I(P)$ een deelverzameling van D^n . Hier is D^n de verzameling van rijtjes van elementen van D ter lengte n (n -tuples). M.a.w. $I(P) \subseteq D^n$.

Voor unaire P beschouwen we $I(P)$ vaak als een deelverzameling van P . Voor 0-aire P is $I(P)$ een waarheidswaarde net als in de propositielogica.



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complex Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Interpretatie van Atomaire Formules

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

- ▶ $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$ dan en slechts dan
 $\langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},f}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

De reset

$f[x := d]$ is het resultaat van het veranderen van de waarde van f op x naar d . Met andere woorden $f[x : d]$ is een bedeling g zodat $g(y) = f(y)$ voor alle variabelen y syntactisch ongelijk aan x en $g(x) = d$.

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Interpretatie van Complexe Formules 1

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},f}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem $\perp$	$\mathcal{M}, f \models \perp$	$\Leftrightarrow$	$0=1$
sem $\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem $\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem $\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem $\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem $\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$[\mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \models B]$ of $[\mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B]$
sem $\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$
sem $\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, zodat $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Interpretatie van Complexe Formules 2

$\mathcal{M}, f \not\models Pt_1 \dots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},f}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},f} \rangle \notin I(P)$
$\mathcal{M}, f \not\models \perp$	$\Leftrightarrow$	$0=0$
$\mathcal{M}, f \not\models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models B$
$\mathcal{M}, f \not\models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \not\models B$
$\mathcal{M}, f \not\models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B$
$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B$
$\mathcal{M}, f \not\models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$[\mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B]$ of $[\mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \models B]$
$\mathcal{M}, f \not\models \forall x A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, zodat $\mathcal{M}, f[x : d] \not\models A$
$\mathcal{M}, f \not\models \exists x A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \not\models A$

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht

Definitie van Geldigheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Zij een signatuur Σ gegeven.

- (i) $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ desda $\mathcal{M}, f \models C$ voor alle $C \in \Gamma$.
- (ii) $\Gamma \models A$ desda, voor alle $\mathcal{M}$ in Mod_Σ en voor alle bedelingen f over het domein van $\mathcal{M}$, we hebben $\mathcal{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, f \models A$.
- (iii) $A_1, \dots, A_n \models B$ desda $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$
- (iv) $\models A$ desda $\emptyset \models A$.



Universiteit Utrecht

Strijdigheid en Vervulbaarheid

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Een verzameling formules Γ is *vervulbaar* of *semantisch consistent* dan en slechts dan als er een model $\mathcal{M}$ is en een bedeling f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$.

Een verzameling formules Γ is of *semantisch inconsistent* dan en slechts dan als er geen model $\mathcal{M}$ is en geen bedeling f is, zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$. Met andere woorden: Γ is strijdig dan en slechts dan als Γ niet vervulbaar is.



Universiteit Utrecht

Correctheid en Volledigheid

Correctheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

We kunnen de correctheidsstelling ook als volgt formuleren (m.b.v. contrapositie): $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$.

Dit zegt dat als we een tegenvoorbeeld tegen de redenering Γ/A vinden, we daarmee tevens hebben aangetoond dat A niet met natuurlijke deductie uit Γ af te leiden is.

Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.
(Gödel, 1930)

We kunnen de volledigheidsstelling herformuleren tot het Model Existentie Lemma:

Als $\Gamma \nvdash A$, dan is er een model $\mathcal{M}$ en een valuatie f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ en $\mathcal{M}, f \not\models A$.

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid



Universiteit Utrecht