Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

17 oktober, 2013

Universiteit Utrecht

Overview

Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Overview

Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Overview

Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Overview

Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Signatuur

Een signatuur Σ is een rijtje $\langle \mathrm{Pred}, \mathrm{Con}, \mathrm{ar} \rangle$. Hier is Pred de verzameling predicaatsymbolen, Con de verzameling constanten en ar de ariteits functie. De functie ar kent aan elk symbool P uit Pred een natuurlijk getal $\mathrm{ar}(P)$, de ariteit van P, toe.

We zullen meestal aannemen dat Pred en Con eindig zijn.

Bereik en Binding

(i) $\forall x\, \exists y\, Kxy$

(ii) $\forall x\, \neg \exists y\, \forall z\, (Hx \rightarrow Txzy)$

(iii) $\forall x\, (Hx \rightarrow Lj)$

(iv) $\forall x\, Hx \rightarrow Lj$

(v) $\exists x\, Hj \rightarrow (\forall x\, (Hx \rightarrow Lx) \rightarrow Rxj)$

(vi) $\forall x\, (Hx \rightarrow \exists x\, Lx)$

(vii) $\forall x\, (Hx \rightarrow \exists y\, Ly)$

(i.) $\forall x\, \exists y\, Kxy$

(ii.) $\forall x\, \neg \exists y\, \forall z\, (Hz \rightarrow Tzyx)$

(iii.) $\forall x\, (Hx \rightarrow Lj)$

(iv.) $\forall x\, Hx \rightarrow Lj$

(v.) $\forall x\, (Hx \rightarrow \exists x\, Lx)$

(vi.) $\forall x\, (Hx \rightarrow \exists y\, Ly)$

Bereik en Binding 2

Een voorkomen van een variabele in een formule is *gebonden* als hij in het bereik van een kwantor voorkomt die de direct gevolgd wordt door dezelfde variabele (qua type). Een voorkomen is *vrij* als het niet gebonden is.

Een formule is een *gesloten formule* of een *zin* als hij geen vrije variabele-voorkomens bevat, anders is een formula *open*.

Overview

Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Signatuur

Een signatuur Σ is een rijtje $\langle \mathrm{Pred}, \mathrm{Con}, \mathrm{ar} \rangle$. Hier is Pred de verzameling predicaatsymbolen, Con de verzameling constanten en ar de ariteits functie. De functie ar kent aan elk symbool P uit Pred een natuurlijk getal $\mathrm{ar}(P)$, de ariteit van P, toe.

We zullen meestal aannemen dat Pred en Con eindig zijn.

Bijvoorbeeld: $\langle \{K, S\}, \{i, j\}, \mathrm{ar} \rangle$,
waar $\mathrm{ar}(K) = 1$ en $\mathrm{ar}(S) = 2$.

Hier zou K kunnen staan voor *kapper zijn* en S voor *scheren*, De constante i zou kunnen staan voor mij en de constante j voor Janssens.

Formule uit deze signatuur:
$\forall x\, (Kx \to (\neg Sxx \wedge Sxj)) \vee Kij$.

Voegtekens

Het alfabet van de predikatenlogische taal $\mathcal{L}_\Sigma$ die gebaseerd is op Σ bestaat uit de volgende symbolen:

- de predikaatsymbolen uit Pred,
- de constanten uit Con,
- variabelen(oneindig veel): $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- voegtekens: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp$
- kwantoren: $\forall, \exists$
- haakjes: (,)
- de komma: ,

Termen en Formules

We werken met een gegeven signatuur Σ. Een *term* is een constante uit Σ of een variabele.

Een atomaire formule is hetzij $\perp$, hetzij een formule van de vorm $Pt_1 \dots t_n$, waar P een predicaat is en waar $n = \mathrm{ar}(P)$.

De klasse Form van formules van de predikatenlogische taal $\mathcal{L}_\Sigma$ is gegeven door een inductieve definitie met de volgende regels:

(i) Atom $\subseteq$ Form

(ii) als $A \in$ Form, dan ook $\neg A \in$ Form

(iii) als $A, B \in$ Form, dan ook $(A \wedge B) \in$ Form, $(A \vee B) \in$ Form, $(A \to B) \in$ Form, $(A \leftrightarrow B) \in$ Form

(iv) als $A \in$ Form, dan ook $\forall x_i\, A \in$ Form, $\exists x_i\, A \in$ Form

Overview

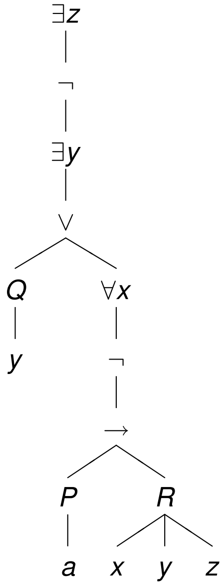
Basis Begrippen

Talen van de Predicatenlogica

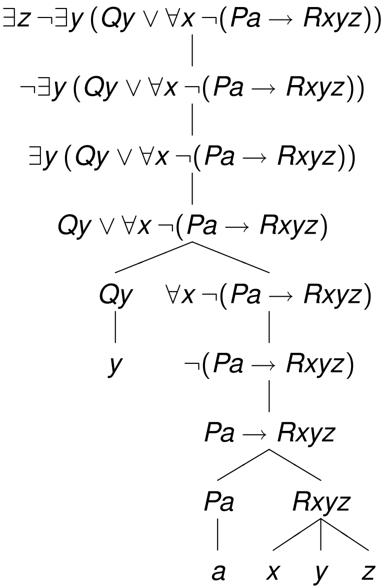
Bomen, Voorkomens, Binding

Constructieboom

$\exists z \neg \exists y\, (Qy \vee \forall x \neg (Pa \rightarrow Rxyz))$



Geassocieerde Formule



Labels en Voorkomens

We zeggen dat een symbool dat aan de boom in de eerste stijl hangt (predicaatsymbool, constante, variabele, propositioneel voegteken, kwantor) *het korte label* van de knoop is. De formule die aan de boom in de tweede stijl hangt is *het lange label*.

Een *voorkomen* van een predicaatsymbool, constante, . . . , in een formule A is een paar $\langle k, \chi \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar χ het korte label is van k. Hier is χ dus het symbool dat een voorkomen heeft.

Een *voorkomen* van een (sub)formule B, in een formule A is een paar $\langle k, B \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar B het lange label is van k.

Subformules en Bereik en Binding

De *subformules* van een formule A zijn de lange labels van de analyseboom van A, m.a.w. het zijn de formules die in A voorkomen. Merk op dat een subformule meerdere malen kan voorkomen.

Stel $\langle k, \chi \rangle$ is een voorkomen van een voegteken of een kwantor. Het bereik van $\langle k, \chi \rangle$ is $\langle k, B \rangle$, waar B het lange label is van k.

Stel $\langle k, Qv \rangle$ is een voorkomen van een kwantor en $\langle \ell, u \rangle$ een voorkomen van een variabele. $\langle k, Qv \rangle$ bindt $\langle \ell, u \rangle$ als u en v identiek zijn en er een neerwaards pad is van k naar ℓ, waarlangs geen andere kwantor $Q'v$ voorkomt.

Vrije en Gebonden Voorkomens van Variabelen

Een voorkomen van een variabele is *gebonden* als er een kwantor voorkomen is dat dat voorkomen bindt.

Een voorkomen van een variabele is *vrij* als het niet gebonden is.

Een variabele is *vrij* in een formule als hij een vrij voorkomen heeft.

Systematische Namen van Knopen