Inleiding Logica voor CKI, 2013/14

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

14 oktober, 2013

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Universiteit Utrecht

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Toets

Wegens een fout van de administratie kan de toets niet op de voorgestelde tijd plaatsvinden. De toets vindt nu plaats op:

- donderdag 7 november 13.30 - 16.30 uur
  WENT-BLAUW (220)

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Syntaxis 1

De eerste ronde:

- Constanten: $a, b, c, d, \ldots$
- Variabelen: $x, y, z, \ldots$.
- Predicaatsymbolen: P, $Q(x)$, $R(x, y)$, $T(x, y, z)$, $\ldots$
- Propositionele logische voegtekens: $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\ldots$
- Formules: $((Q(x) \vee \neg R(y, a)) \wedge T(x, a, y))$
- $\ldots$

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Syntaxis 2

De tweede ronde:

- ...
- $\forall$: universele kwantor, voor alle kwantor.
- $\exists$: existentiele kwantor, er is kwantor.
- Formules: $\exists x \, \forall y \, Rxy$, $\forall x \, (Qx \rightarrow Px)$.

- Betekenis $\forall x$: voor alle objecten x in het domein zodat ...
- Betekenis $\exists x$: er is tenminste één object x in het domein zodat ...

Signatuur

Een signatuur Σ is een rijtje $\langle \text{Pred}, \text{Con}, \text{ar} \rangle$. Hier is Pred de verzameling predicaatsymbolen, Con de verzameling constanten en ar de ariteits functie. De functie ar kent aan elk symbool P uit Pred een natuurlijk getal $\text{ar}(P)$, de ariteit van P, toe.

We zullen meestal aannemen dat Pred en Con eindig zijn.

Bijvoorbeeld: $\langle \{K, S\}, \{i, j\}, \text{ar} \rangle$,
waar $\text{ar}(K) = 1$ en $\text{ar}(S) = 2$.

Hier zou K kunnen staan voor *kapper zijn* en S voor *scheren*, De constante i zou kunnen staan voor mij en de constante j voor Janssens.

Formules uit deze signatuur:
$(\forall x\, (Kx \rightarrow (\neg\, Sxx \wedge Sxj)) \vee Kj)$
$\exists x\, (Kx \wedge \forall y\, (\neg\, Syy \leftrightarrow Sxy))$

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Wat is een Model?

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Een model van signatuur Σ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar D een *niet-leeg* domain is en I de interpretatiefunctie.

I kent aan de elementen van de signatuur hun interpretaties toe. In het geval van de constanten is dat makkelijk: I kent aan de constanten van de signatuur objecten uit het domein toe.

Intermezzo 1: Verzamelingenleer

Verzamelingen zijn volledig gegeven met de objecten die er in zitten. Een verzameling X is een *deelverzamelig* van Y of $X \subseteq Y$ als alle elementen van X in Y zitten. Er is een lege verzameling $\emptyset$ waar niks in zit. $\{d, e, f\}$ is de verzameling met elementen d, e en f. $\{d \in D \mid Pd\}$ is de verzameling van alle elementen van D met eigenschap P.

Van de elementen van een verzameling kunnen we rijtjes vormen: $\langle d_1, d_2, d_3, d_4 \rangle$. Rijtjes hebben een lengte: ons voorbeeld heeft lengte 4. We noemen een rijtje ter lengte n soms een *n-tuple*.

Er is een uniek rijtje ε van lengte 0.

We schrijven D^n voor de verzameling van alle rijtjes van elementen van D van lengte n. $D^0 = \{\varepsilon\}$, $D^1 := \{\langle d \rangle \mid d \in D\}$. We verwarren D^1 vaak met D.

$\{a, b\}^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Intermezzo 2: Relaties

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

We representeren een n-aire relatie R over D als een verzameling rijtjes ter lengte n.

Dus: $R \subseteq D^n$.

Vergelijk dit met verschillende soorten tabellen en pijldiagrammen. Al die representaties staan voor hetzelfde: relaties in extensie met vaste ariteit.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1

Stel $\mathrm{ar}(P) = n$. Dan is $I(P)$ een n-aire relatie over D. Dat betekent: een verzameling van n-tuples uit D.

Dus: $I(P) \subseteq D^n$.

Stel ons domain bestaat uit Jan, Clara en Aslan en $I(P) = 1$. Dan zouden we bijvoorbeeld kunen hebben: $I(P) = \{\langle \text{Clara} \rangle, \langle \text{Arslan} \rangle\}$.

We verwarren dit vaak met $I(P) = \{\text{Clara}, \text{Arslan}\}$.

Als $\mathrm{ar}(Q) = 2$ dan zouden we kunnen hebben:
$I(Q) = \{\langle \text{Clara}, \text{Jan} \rangle, \langle \text{Arslan}, \text{Arslan} \rangle, \langle \text{Arslan}, \text{Clara} \rangle\}$.

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Interpretatie van Predikaatsymbolen 2

Deze slide bevat een redelijk scholastisch punt. Degenen bij wie dit niet ‘pakt’ kunnen wat mij betreft gewoon onthouden dat de interpretaties van 0-plaatsige predikaten de waarheidswaarden zijn. Het belangrijkste punt van deze slide is dat die keuze niet *ad hoc* is.

Er is maar één 0-tupel: ε. De interpretatie van $I(P)$ met $\mathrm{ar}(P) = 0$ zou een verzameling 0-tupels moeten zijn.

Er zijn precies twee verzamelingen 0-tupels: $\emptyset$ en $\{\varepsilon\}$.

We identificeren de waarheidswaarde 0 met $\emptyset$ en de waarheidswaarde 1 met $\{\varepsilon\}$. Hoe meer er in zit hoe waarder.

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Interpretatie van de Variabele

Kunnen we de variabele interpreteren als $I(x) = d$, waar $d \in D$? Nee, dan zouden we geen verschil hebben tussen een variabele en een constante.

We voeren een tweede orakel in naast I: de bedeling f. De bedeling is een functie van variabelen naar de objecten uit het domein. Terwijl we het domein vasthouden laten we de bedeling variëren en daarmee de waarde van de variabele.

- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = I(t)$, als t een constante is.
- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = f(t)$, als t een variabele is.

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Overview

Toets

Taal en Signatuur

Model

Variabelen

Interpetatie van Formules: Preview

Interpretatie van Atomaire Formules

De onderstaande stof gaat behandeld worden in het tweede semantiekcollege.

- $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$ dan en slechts dan $\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$.

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview

Interpretatie van Complexe Formules

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\bot$	$\mathcal{M}, f \models \bot$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	[$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$] of [$\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B$]
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$

Toets
Taal en Signatuur
Model
Variabelen
Interpetatie van Formules: Preview