Predikatenlogica in Vogelvlucht

Albert Visser

Filosofie, Faculteit Geesteswetenschappen, Universiteit Utrecht

10 oktober, 2013

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Propositielogica

In de propositielogica behandelen we de interne structuur van zinnen als black box. Propositielogica zit vrij ver af van het dagelijks redeneren.

Propositielogica is verbijsterend succesvol: electronische circuits, complexiteitstheorie, typentheorie.

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Propositielogica 2

Extensies van de propositielogica worden gebruikt in de AI: bijvoorbeeld modale logica's voor *agent technology* (John-Jules Meijer). Modale logica wordt behandeld in de 2de jaars cursus logica voor AI.

Pogingen om de propositielogica dichterbij het alledaagste redeneren te brengen, dus meer naar de begrijpen-door-maken motivatie te bewegen:

- niet monotone logicas,
- fuzzy logic,
- relevance logic,
- temporele logica,
- . . .

Predikatenlogica 1

We 'verkrijgen' predikatenlogica uit propositielogica door (i) predicaten toe te voegen (iii) gebruik van (object-)variabelen en (iii) verrijking met de kwantoren *voor alle* ($\forall$) en *er is* ($\exists$).

Predikatenlogica is adequaat om het *wiskundig redeneren* te analyseren *in principe*. Om echt een substantieel bewijs te representeren is het nogal onhandig. Dit heeft geleid tot de ontwikkeling van bijvoorbeeld typentheorie.

Predikatenlogica als voorloper van programmeertalen.

Proofcheckers: Automath, Coq, Mizar, . . .

Model theorie: geeft veel informatie over wiskundige theorieën en structuren.

Predikatenlogica versus Propositielogica
Hoe ziet Predikatenlogica er uit?
Meetkunde volgens Tarski

Predikatenlogica 2

Pogingen om de predikatenlogica dichterbij het alledaagse spreken en redeneren te brengen:

- Montague grammatica
- Categoriale Grammatica (Michael Moortgat)
- Dynamische Semantiek (Albert Visser)

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Predikatenlogica 3

Definities van uniforme continuiteit en van continuiteit:

- Een functie $f : X \to Y$ is *uniform continu* als voor alle $\epsilon > 0$, er een $\delta > 0$ is, zodat voor alle $x_0, x_1 \in X$, als $d_X(x_0, x_1) < \delta$, dan $d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon$.
- Een functie $f : X \to Y$ is *continu* als voor alle $\epsilon > 0$ en voor alle $x_0, x_1 \in X$, er een $\delta > 0$ is, zodat als $d_X(x_0, x_1) < \delta$, dan $d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon$.

Eén van de doelstellingen van de predikatenlogica is een systematische analyse te geven van dit soort zinnen.

Predikatenlogica is 'realistischer' dan propositielogica doordat het ons meer laat zien van zinsstructuur, maar de punten waar propositielogica afwijkt van het dagelijks denken zijn nog steeds aanwezig.

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Constanten en Predikaatsymbolen

Constanten staan voor objecten:
j voor Jasmina, o voor Omar, f voor Felix, d voor de Dom, m een specifiek benoemde mat, a voor Amsterdam, u voor Utrecht, e voor Enschede.

Predikaatsymbolen staan voor relaties:
Z voor *zitten op*, T voor *tussen*, K voor *kleiner dan*.

- $Z(f, m)$: Felix zit op de mat.
- $K(j, o)$: Jasmina is kleiner dan Omar.
- $T(u, a, e)$: Amsterdam ligt tussen Utrecht en Enschede.

Predikaatsymbolen hebben een *ariteit*: Z heeft ariteit 2 en T heeft ariteit 3.

Predikatenlogica versus Propositielogica
Hoe ziet Predikatenlogica er uit?
Meetkunde volgens Tarski

Variabelen en Kwantoren

Variabelen: $x, y, z, \ldots$.
Een variabele staat variabel voor een object? Hoe moeten we hier over denken?

Zij x een even getal en y een oneven getal. Dan is $x + y$ oneven.

Kwantoren: $\forall x$: voor alle x, $\exists x$: er is een x.

- $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.
- $\forall x\,\exists y\,K(x, y)$.
- Uniforme continuiteit:
  $$\forall \epsilon\,(\epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta\,(\delta > 0 \wedge \forall x_0\,\forall x_1\,(d(x_0, x_1) < \delta \rightarrow d(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon))).$$

Universiteit Utrecht

Taal en Werkelijkheid

Om de predikatenlogica uit te leggen moeten we twee ingredienten uitleggen:

- Syntax (Taal)
- Semantiek (Werkelijkheid)

Bij de *syntax* horen specificatie van predikatenlogische talen en van een ND bewijssysteem.

Bij de *semantiek* hoort explicatie van het *model begrip* (model = wereld) en specificatie van de interpretatiefunctie die van taal naar werkelijkheid gaat.

We beginnen met een informele uitleg van syntax en semantiek.

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Domein / Discussiedomein

In de predikatenlogica spreken we nooit van *alle objecten* zonder meer.

Het is zelfs de vraag of het zinnig is over *alle objecten* überhaupt te spreken. Bijvoorbeeld: in sommige contexten rekenen we misschien schaduwen tot de objecten en in sommige contexten niet.

Daarom moet in de predikatenlogica altijd een *domein* of *discussie domein* gegeven worden. We nemen steeds aan dat het domein niet leeg is!

Het ligt voor de hand om meerdere domeinen voor verschillende soorten te gebruiken. Als we bijvoorbeeld nadenken over planning van vluchten: tijden en bestemmingen. Dat kan heel goed, maar wij zullen nu met éénsoortige predikatenlogica werken.

Predikatenlogica versus Propositielogica
Hoe ziet Predikatenlogica er uit?
Meetkunde volgens Tarski

Constanten en Objecten

Constanten c, d, ... staan voor objecten in het domein. Gegeven een *model*, staat elke constante op vaste wijze voor een uniek object. (Als we het model variëren kan de waarde van de constante veranderen.)

Analoga van constanten in natuurlijke taal:

- Namen: Piet, Jasmina, Barak, ..., Amsterdam, (de planeet) Mars, ...
- Uniek bepalende beschrijvingen: de dame met het rode hoedje, de hoofdstad van Nederland, het militair-industrieel complex, ...

Predikatenlogica versus Propositielogica
Hoe ziet Predikatenlogica er uit?
Meetkunde volgens Tarski

Predikaatsymbolen en Relaties 1

Predikaatsymbolen: P, Q, R. Elk symbool heeft een gespecificeerde *ariteit* of *plaatsigheid*.

- P: ariteit 0, propositieletter, staat voor een waarheidswaarde.
- $Q(c)$: ariteit 1, unair predikaat, staat voor een *eigenschap*
- $R(c, d)$: ariteit 2, binair predikaat, relatiesymbool, staat voor een (binaire) relatie.

We laten ook wel de haakjes weg: Qc, Rcd.

Natuurlijk taal voorbeelden: (het) regent, boos zijn, zitten op, liggen tussen, . . .

Predikaatsymbolen en Relaties 2

Elk predikaat staat voor een relatie tussen de objecten uit het domein. Als het een *n*-air symbool is staat het voor een *n*-aire relatie.

We bezien steeds *relaties in extensie*.
Binaire relatie *houden van*:
domein {Jan, Jasmina, Barak}.

houden van	Jan	Jasmina	Barak
Jan	+	−	−
Jasmina	−	−	−
Barak	+	+	−

Alleen wel en niet onder de relatie vallen telt.
Wezen met hart = wezen met nieren.

Universiteit Utrecht

Overview

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Primitieve begrippen

- Een binaire relatie identiteit. We schrijven deze met *infix notatie*: $x = y$. Eigenlijk hadden we zoiets als Ixy moeten schrijven.
- Een quaternaire relatie die geschreven wordt als $xy \equiv uv$. Deze staat voor: het lijnstuk xy is even lang als het lijnstuk uv. Eigenlijk hadden we zoiets als $Exyuv$ moeten schrijven.
- Een ternaire relatie $\mathrm{B}xyz$. Deze betekent: y ligt op het lijnstuk xz, en daarmee tussen x en y. In het geval dat $\mathrm{B}xyz$, laten toe dat $y = x$ en we laten toe dat $y = z$. Bovendien laten in dat geval we toe dat $x = z$. Als $x = z$, hebben we $x = y = z$.

Afpassen van Lijnstukken

$\forall y\, \forall z\, \forall u\, \forall v\, \exists x\, (\mathrm{B}yzx \wedge zx \equiv uv)$

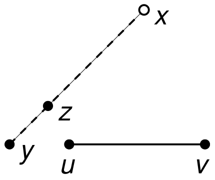


Figure: Afpassen van lijnstukken

We kunnen op de lijn *yz* vanuit *z* in de richting van *y* naar *z* een lijnstuk afpassen ter lengte *uv*. Dit is het axioma van het afpassen van lijnstukken.

Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Dimensie: ondergrens

$\exists x\,\exists y\,\exists z\,(\neg\,\mathrm{B}xyz \wedge \neg\,\mathrm{B}yzx \wedge \neg\,\mathrm{B}zxy)$

Dit axioma zegt dat er drie punten zijn die niet op één lijn liggen en dat dus de ruimte tenminste twee-dimensionaal is.

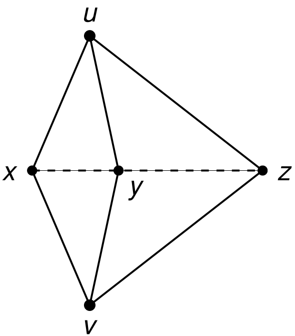
Predikatenlogica versus Propositielogica

Hoe ziet Predikatenlogica er uit?

Meetkunde volgens Tarski

Dimensie: bovengrens

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, \forall u \, \forall v \, ((u \neq v \wedge xu \equiv xv \wedge yu \equiv yv \wedge zu \equiv zv) \rightarrow (\mathrm{B}xyz \vee \mathrm{B}yzx \vee \mathrm{B}zxy))$$



Dit axioma zegt dat drie punten die op gelijke afstand van twee gegeven (verschillende) punten liggen op één lijn liggen, en dat dus de ruimte dimensie ten hoogste twee heeft.