Overzicht

- natuurlijke deductie (vervolg)
- functionele volledigheid
- semantisch gevolg

Geldigheid

Een redenering

$$\frac{A_1 \ \dots \ A_n}{C}$$

is **geldig** als in alle *situaties* waarin de aannames *(A_1 ...A_n) vervuld* zijn de conclusie *(C)* ook *waar* is.

Geldigheid

voor alle valuaties V

$$\frac{\text{als } V(A_1)=1 \text{ en } \ldots \text{ en } V(A_n)=1}{\text{dan } V(C)=1}$$

Geldigheid

voor alle werelden V

$$\frac{\text{als } V \vDash A_1 \text{ en } \ \ldots \ \text{ en } V \vDash A_n}{\text{dan } V \vDash C}$$

notatie: A_1 ,..., $A_n \vDash C$

Natuurlijke deductie

- syntax voor bewijzen in propositielogica
- syntax = afleidingsbomen
- boom modelleert hypothetische redenering
- bladeren = aannames (0,1 of meer)
- vertakking = redeneerstap
- wortel = conclusie (precies 1)

ND: syntax vs. semantiek

- $A_1,...,A_n \vdash B$
- er is een afleidingsboom met (niet ingetrokken) aannames (dwz bladeren) $A_1,...,A_n$ `en conclusie (dwz wortel) B
- afleidingsregels `voeren waarheden in een nieuwe waarheid' over
- $A_1,...,A_n \models B$ (correctheid (na te streven))

Redeneerstap

- redeneerstap instantie van redeneerschema
- per connectief introductie en eliminatieschema
- introductieschema = introduceer dat connectief als hoofdconnectief in formule
- eliminatieschema = verwijder/elimineer dat hoofdconnectief uit formule

ND: conjunctie

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

Eliminatie (links)

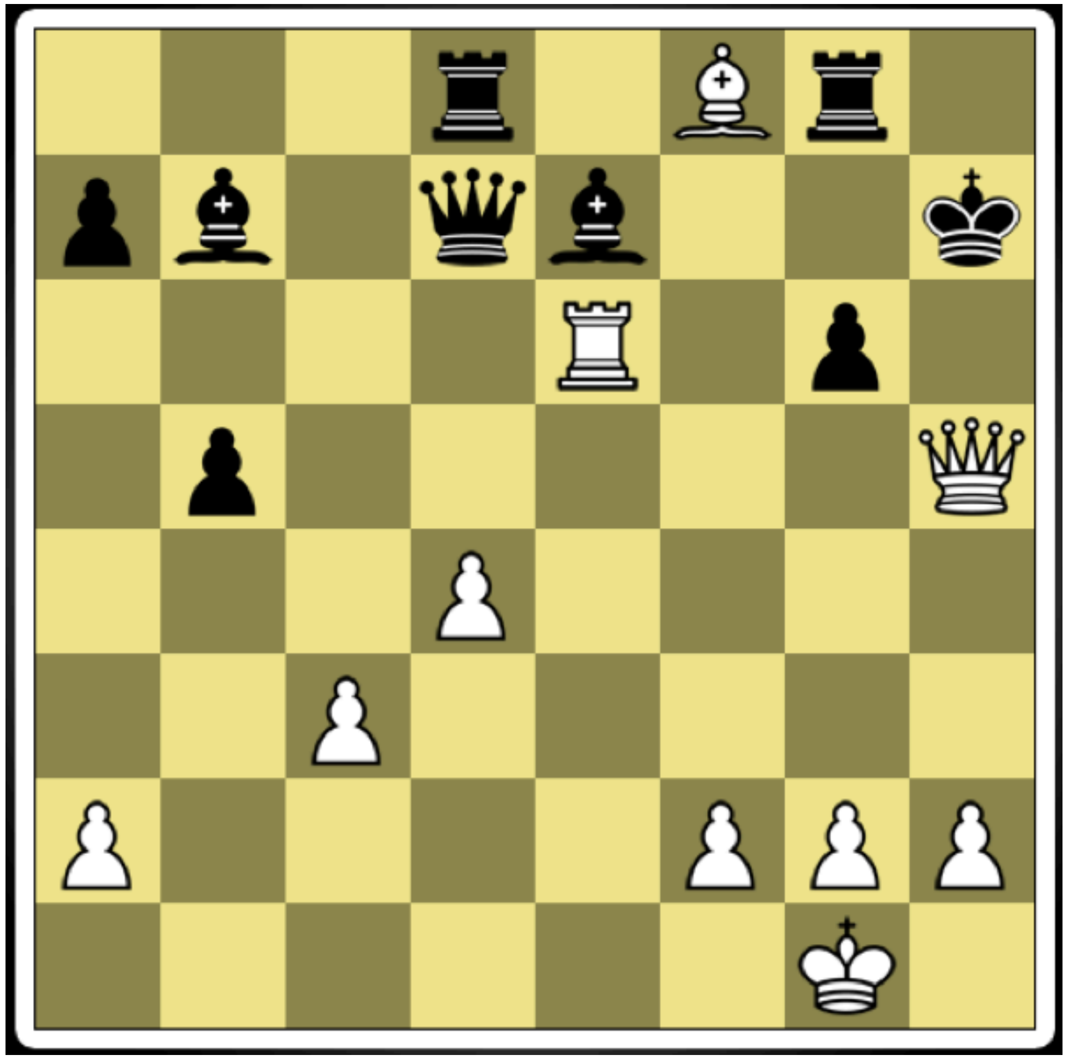
$$\frac{A \wedge B}{B}$$

Eliminatie (rechts)

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

Introductie

Implicatie



zwart zet → wit kan mat geven?

ND:implicatie

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \to\mathrm{E}$$

Eliminatie

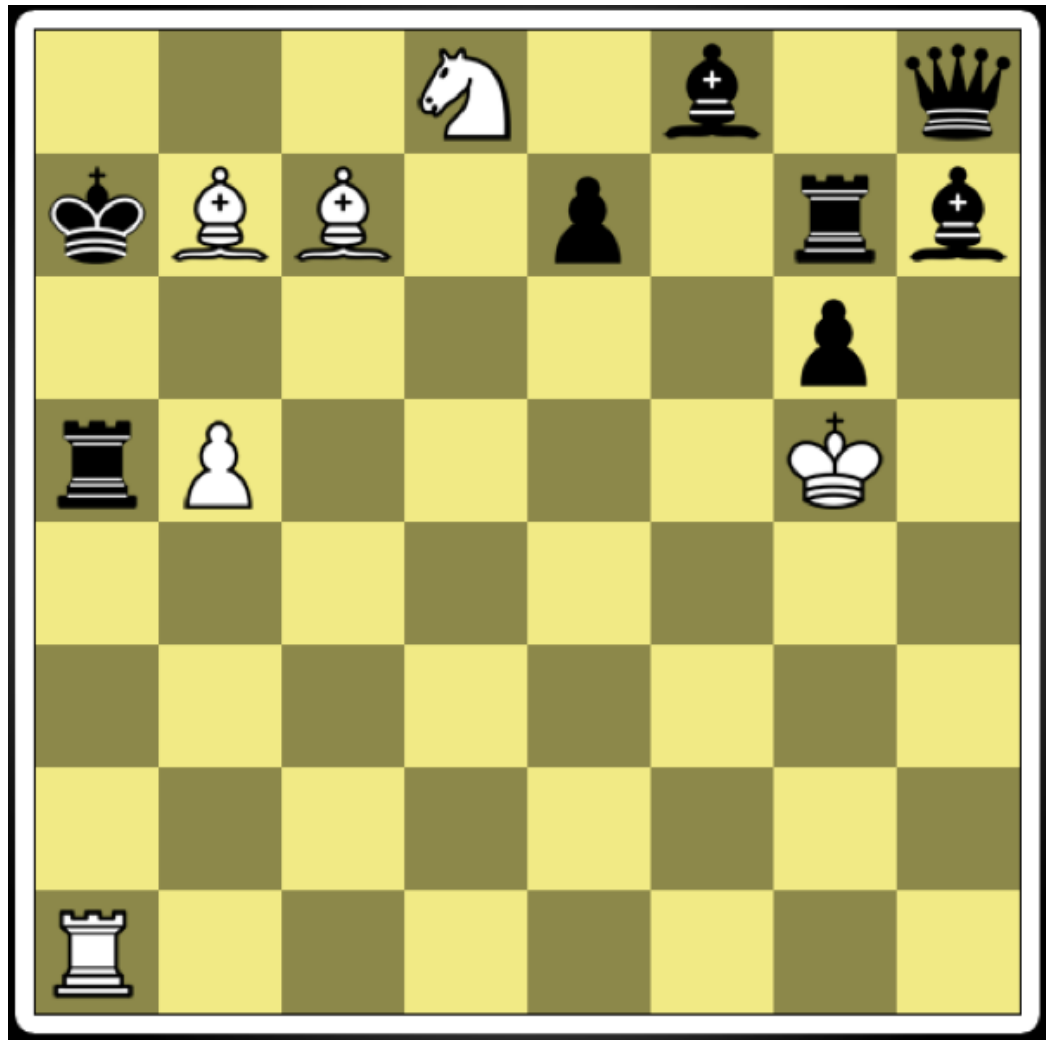
$$\begin{array}{c} [A] \\ \bigtriangledown \\ \dfrac{B}{A \to B} \end{array}$$

Introductie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

Intrekken hypothesen

- Label intrekkende regelinstantie op unieke wijze, b.v. met een getal n
- Bepaal de in te trekken hypothesen (moeten van de goede vorm zijn, en niet ingetrokken)
- Zet rechte haken om de in te trekken hypothesen en label met n

Disjunctie



wat zwart zet → wit kan mat geven?

ND:disjunctie

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \\ C\end{matrix}}{C}$$

Eliminatie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

$$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \dfrac{B}{A \vee B}$$

Introductie (links) Introductie (rechts)

ND: negatie

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}$$

Eliminatie

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}$$

Introductie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

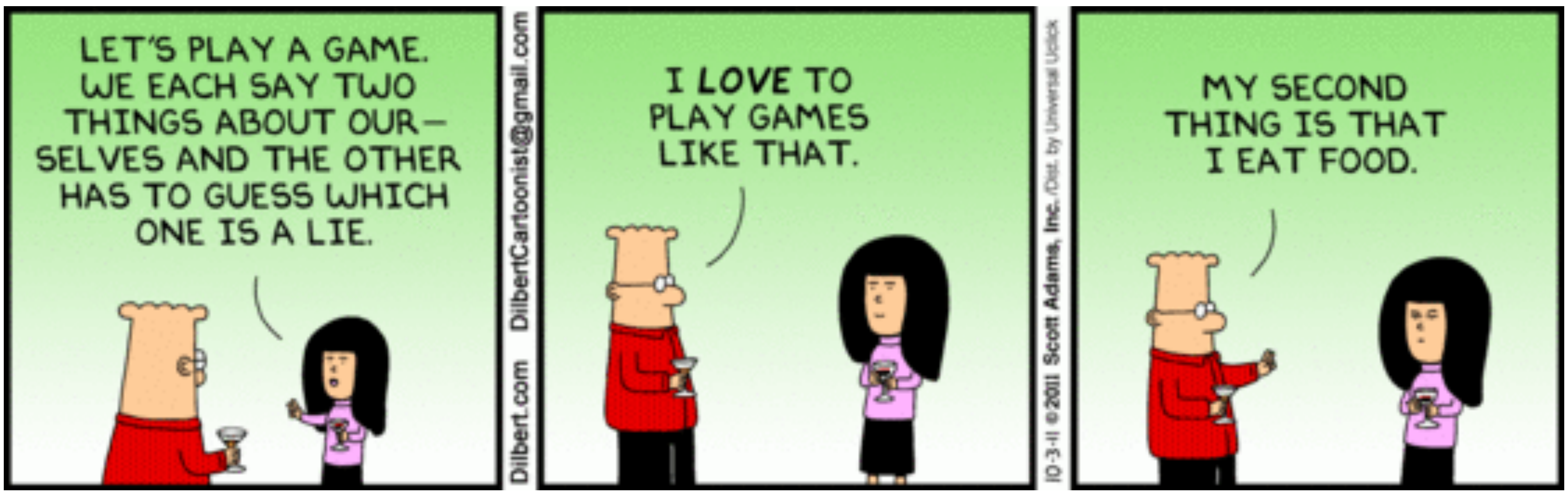
ND:falsum

$$\frac{\perp}{A}$$

Eliminatie

Introductie

Bi-implicatie eliminatie



Alles te bewijzen?

- nee, b.v. Pierce's Law niet: $((p \to q) \to p) \to p$

reductio ad absurdum

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \\ \bot\end{array}}{A}$$

Functionele volledigheid

Stelling: voor iedere waarheidstafel is er een formule die die als waarheidstafel heeft

Idee: neem voor iedere rij uit de waarheidstafel met waarde 1, de conjunctie van alle propositievariabelen die waarde 1 hebben, en de negatie van de andere propositievariabelen. neem de disjunctie van al deze rijen.

Maakt waar

- $V \models p$ als $V(p) = 1$
- niet $V \models \perp$ (afkorting $V \not\models \perp$)
- $V \models \neg A$ als $V \not\models A$
- $V \models (A \wedge B)$ als $V \models A$ en $V \models B$
- $V \models (A \vee B)$ als $V \models A$ of $V \models B$
- $V \models (A \rightarrow B)$ als $V \not\models A$ of $V \models B$
- $V \models (A \leftrightarrow B)$ als $(V \models A)$ desda $(V \models B)$

Semantisch gevolg

- definitie: $V \models \Gamma$ als $V \models A$ voor alle $A \in \Gamma$ (een valuatie V maakt een verzameling Γ van formules waar, als V iedere formule A in die verzameling waar maakt)
- definitie: $\Gamma \models A$ als voor alle V zodanig dat $V \models \Gamma$ geldt $V \models A$ (A is een semantisch gevolg van Γ als iedere valuatie V die Γ waar maakt ook A waar maakt

Semantisch vervolg

- $\{ (p_0 \wedge p_1) \} \vDash p_0$ (want als $V \vDash (p_0 \wedge p_1)$ dan per definitie van wanneer V een conjunctie waar maakt, $V \vDash p_0$ en $V \vDash p_1$, waarvan we de eerste gebruiken om te concluderen
- $\{ p_0, \neg p_0\} \vDash \bot$ (want iedere valuatie V waarvoor zowel $V \vDash p_0$ als $V \vDash \neg p_0$ geldt, dat wil zeggen voor geen enkele V, geldt ook $V \vDash \bot$; de verzameling $\{ p_0, \neg p_0\}$ is strijdig)

Stellingen over $\models$

- $A \models B$ dan en slechts dan als $\{A, \neg B\} \models \bot$
- $A \models B$ dan en slechts dan als $\models A \rightarrow B$ (Hfdstk 6, Stelling 3.9)

Volledigheidsstelling

- (B is een semantisch gevolg van $A_1,...,A_n$) dan en slechts dan als (B afleidbaar uit $A_1,...,A_n$)
- $A_1,...,A_n \models B$ dan en slechts dan als $A_1,...,A_n \vdash B$
- $\models$ = $\vdash$ (semantiek vs. syntax)
- $\models$ als $\vdash$ (correctheid, soundness)
- $\models$ dan $\vdash$ (volledigheid, completeness)