# College Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

29 oktober, 2012

Complexe Formules
Geldigheid
Natuurlijke Deductie
Voorbeelden

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# ∀E

De ∀-eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x\, A}{(A)[x := t]}\ \forall E$$

We eisen dat $t$ vrij is voor $x$ in $A$.

Wat er mis gaat als we dit niet eisen, wordt onmiddellijk duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Goed: $$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, z < y}\ \forall E$$

Fout: $$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, y < y}\ \forall E$$

# $\forall$I

De $\forall$-introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x := y]}{\forall x\, A}\ \forall\mathrm{I}$$

We eisen:

1. $y$ is vrij is voor $x$ in $A$,
2. $y$ komt niet vrij voor in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x := y]$ op gebaseerd is,
3. hetzij $y$ is identiek aan $x$ of $y \notin \mathrm{FV}(A)$.

# Voorwaarde 1+ 2



$y$ is vrij is voor $x$ in $A$. We kiezen $A := \exists y\, Dxy$.
$A[x := y] = \exists y\, Dyy$.

Fout:

$$\dfrac{\exists y\, Dyy}{\forall x\, \exists y\, Dxy}\ \forall \mathrm{E}$$

$y$ komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x : y]$ op gebaseerd is. We kiezen $A := Qx$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{Py \qquad \dfrac{\forall x\,(Px \to Qx)}{Py \to Qy}\ \forall \mathrm{E}}{Qy}\ {\to}\mathrm{E}}{\forall x\, Qx}\ \forall \mathrm{I}$$

# Voorwaarde 3

Hetzij $y$ is identiek aan $x$ of $y \notin \mathrm{FV}(A)$. We kiezen $A = Rxy$.
$A[x := y] = Ryy$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, Rxx}{Ryy}\,\forall E}{\forall x\, Rxy}\,\forall I}{\forall y\, \forall x\, Rxy}\,\forall I$$

# $\exists$I

$$\frac{A[x := t]}{\exists x\, A}\ \exists\text{I}$$

We eisen dat $t$ substitueerbaar is voor $x$ in $A$.

Fout:
$$\frac{\forall y\, Ryy}{\exists x\, \forall y\, Rxy}\ \exists\text{I}$$

$A = \forall y\, Rxy$, $A[x := y] = \forall y\, Ryy$.

# ∃E

$$\dfrac{\exists x\, A \qquad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \exists E$$

1. $y$ is substitueerbaar voor $x$ in $A$.
2. In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: $y$ mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.
3. $y$ is identiek aan $x$, of $y$ komt niet vrij voor in $A$.
4. $y$ mag niet vrij voorkomen in $C$.

# Conditie 1

$y$ is vrij voor $x$ in $A$.

Fout:

$$\frac{\exists x\, \forall y\, Px \quad [\forall y\, Py]^1}{\forall y\, Py}\ \exists E, 1$$

$A := \forall y\, Px$, $A[x := y] = \forall y\, Py$.


Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Conditie 2

In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: $y$ mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, Px \qquad \dfrac{\exists x\, Qx \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^2 \quad [Qy]^1}{Py \wedge Qy}\,\wedge\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 1}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 2$$

$A := Qx$, $A[x := y] := Qy$. In de eerste $\exists$E komt de variabele $y$ ook vrij voor in $Py$. De tweede $\exists$E is correct (met $A := Px$ en $A[x := y] := Py$. De assumptie $Qy$ is op dit punt opgeheven.)

# Conditie 3

$y$ is identiek aan $x$, of $y$ komt niet vrij voor in $A$.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, x \neq y \qquad \dfrac{[y \neq y]^1}{\exists x\, x \neq x}\,\exists I}{\exists x\, x \neq x}\,\exists E, 1$$

$A := (x \neq y)$, $A[x := y] := (y \neq y)$.

# Conditie 4



$y$ mag niet vrij voorkomen in $C$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, Px \quad [Py]^1}{Py}\ \exists E, 1}{\forall x\, Px}\ \forall I$$

$A := Px$, $A[x := y] := Py$. De $\forall$I is wel correct.

# Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

# Voorbeelden

1. $\forall x\,(Px \to Qx), \forall x\,(Qx \to Rx) \vdash \forall x\,(Px \to Rx)$
2. $\forall x\,(Px \to Qx) \vdash \forall x\, Px \to \forall x\, Qx$
3. $\forall x\,(Px \to Qx), \neg\forall x\, Qx \vdash \neg\forall x\, Px$
4. $\forall x\,(Px \to Qx), \exists x\, Px \vdash \exists x\, Qx$
5. $\forall x\,(Px \lor Qx) \vdash \exists x\, Px \lor \exists x\, Qx$
6. $\forall x\, Px \lor \exists x\, Qx \vdash \exists x\,(Px \lor Qx)$