College Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

25 oktober, 2012

Universiteit Utrecht

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Universiteit Utrecht

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Overview

Interpretatie van Complexe Formules 1

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\perp$	$\mathcal{M}, f \models \perp$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$[\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B]$ of $[\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B]$
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, zodat $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$

Universiteit Utrecht

Interpretatie van Complexe Formules 2

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, f \not\models Pt_1 \ldots t_n & \Leftrightarrow & \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \notin I(P) \\
\mathcal{M}, f \not\models \bot & \Leftrightarrow & 0{=}0 \\
\mathcal{M}, f \not\models \neg B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \wedge B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ of } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & [\mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B] \text{ of} \\
 & & \qquad [\mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \models B] \\
\mathcal{M}, f \not\models \forall x\, A & \Leftrightarrow & \text{er is een } d \in D\text{, zodat } \mathcal{M}, f[x : d] \not\models A \\
\mathcal{M}, f \not\models \exists x\, A & \Leftrightarrow & \text{voor alle } d \in D\text{, } \mathcal{M}, f[x : d] \not\models A
\end{array}
$$

Universiteit Utrecht

Overview

Definitie van Geldigheid

Zij een signatuur Σ gegeven.

(i) $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ desda $\mathcal{M}, f \models C$ voor alle $C \in \Gamma$.

(ii) $\Gamma \models A$ desda, voor alle $\mathcal{M}$ in Mod_Σ en voor alle bedelingen f over het domein van $\mathcal{M}$, we hebben $\mathcal{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, f \models A$.

(iii) $A_1, \ldots, A_n \models B$ desda $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

(iv) $\models A$ desda $\emptyset \models A$.

Strijdigheid en Vervulbaarheid

Een verzameling formules Γ is *vervulbaar* of *semantisch consistent* dan en slechts dan als er een model $\mathcal{M}$ is en een bedeling f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$.

Een verzameling formules Γ is of *semantisch inconsistent* dan en slechts dan als er geen model $\mathcal{M}$ is een geen bedeling f is, zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$. Met andere woorden: Γ is strijdig dan en slechts dan als Γ niet vervulbaar is.

Correctheid en Volledigheid

Correctheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

We kunnen de correctheidsstelling ook als volgt formuleren (m.b.v. contrapositie): $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$.

Dit zegt dat als we een tegenvoorbeeld tegen de redenering Γ / A vinden, we daarmee tevens hebben aangetoond dat A niet met natuurlijke deductie uit Γ af te leiden is.

Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Gödel, 1930)

We kunnen de volledigheidsstelling herformuleren tot het Model Existentie Lemma:
Als $\Gamma \nvdash A$, dan is er een model $\mathcal{M}$ en een valuatie f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ en $\mathcal{M}, f \not\models A$.

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

$\forall$E

De $\forall$-eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x\, A}{(A)[x := t]}\ \forall\text{E}$$

We eisen dat t vrij is voor x in A.

Wat er mis gaat als we dit niet eisen, wordt onmiddellijk duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Goed:

$$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, z < y}\ \forall\text{E}$$

Fout:

$$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, y < y}\ \forall\text{E}$$

∀I

De ∀-introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x := y]}{\forall x\, A}\ \forall\mathrm{I}$$

We eisen:

1. y is vrij is voor x in A,
2. y komt niet vrij voor in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x := y]$ op gebaseerd is,
3. hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$.

Voorwaarde 1+ 2

y is vrij is voor x in A. We kiezen $A := \exists y\, Dxy$.
$A[x := y] = \exists y\, Dyy$.

Fout:

$$\frac{\exists y\, Dyy}{\forall x\, \exists y\, Dxy}\ \forall E$$

y komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x : y]$ op gebaseerd is. We kiezen $A := Qx$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{Py \qquad \dfrac{\forall x\, (Px \to Qx)}{Py \to Qy}\ \forall E}{Qy}\ \to E}{\forall x\, Qx}\ \forall I$$

Voorwaarde 3

Hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$. We kiezen $A = Rxy$.
$A[x := y] = Ryy$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, Rxx}{Ryy}\,\forall E}{\forall x\, Rxy}\,\forall I}{\forall y\, \forall x\, Rxy}\,\forall I$$

∃I

$$\frac{A[x := t]}{\exists x\, A}\ \exists\mathrm{I}$$

We eisen dat *t* substitueerbaar is voor *x* in *A*.

Fout: $$\frac{\forall y\, Ryy}{\exists x\, \forall y\, Rxy}\ \exists\mathrm{I}$$

$A = \forall y\, Rxy$, $A[x := y] = \forall y\, Ryy$.

∃E

$$\frac{\exists x\, A \qquad \begin{matrix}[A[x := y]] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \exists E$$

1. y is substitueerbaar voor x in A.
2. In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: y mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.
3. y is identiek aan x, of y komt niet vrij voor in A.
4. y mag niet vrij voorkomen in C.

Conditie 1

y is vrij voor x in A.

Fout:

$$\dfrac{\exists x \, \forall y \, Px \qquad [\forall y \, Py]^1}{\forall y \, Py} \; \exists E, 1$$

$A := \forall y \, Px$, $A[x := y] = \forall y \, Py$.

Conditie 2

In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: y mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, Px \qquad \dfrac{\exists x\, Qx \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^2 \quad [Qy]^1}{Py \wedge Qy}\;\wedge\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\;\exists\mathrm{E}, 1}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\;\exists\mathrm{E}, 2$$

Conditie 3

y is identiek aan x, of y komt niet vrij voor in A.

Fout:

$$\dfrac{\exists x\, x \neq y \qquad \dfrac{[y \neq y]^1}{\exists x\, x \neq x}\ \exists I}{\exists x\, x \neq x}\ \exists E, 1$$

Conditie 4

y mag niet vrij voorkomen in C.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, Px \qquad [Px]^1}{Px}\ \exists E, 1}{\forall x\, Px}\ \forall I$$

Overview

Complexe Formules

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Voorbeelden

Voorbeelden

1. $\forall x\,(Px \to Qx), \forall x\,(Qx \to Rx) \vdash \forall x\,(Px \to Rx)$
2. $\forall x\,(Px \to Qx) \vdash \forall x\,Px \to \forall x\,Qx$
3. $\forall x\,(Px \to Qx), \neg\forall x\,Qx \vdash \neg\forall x\,Px$
4. $\forall x\,(Px \to Qx), \exists x\,Px \vdash \exists x\,Qx$
5. $\forall x\,(Px \vee Qx) \vdash \exists x\,Px \vee \exists x\,Qx$
6. $\forall x\,Px \vee \exists x\,Qx \vdash \exists x\,(Px \vee Qx)$