College Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

22 oktober, 2012

Universiteit Utrecht

Overview

Model
Variabelen
Atomaire Formules
Complexe Formules
Geldigheid

Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Universiteit Utrecht

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1

Een model van Signatuur Σ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar D een *niet-leeg* domain is en I de interpretatiefunctie.

I kent aan de constanten van de signatuur objecten uit het domein toe.

Er zijn twee manieren om de interpretatie van de predikaatsymbolen te doen: een *ad hoc* manier die redelijk te begrijpen is en een consequente manier die subtiel is. We behandelen eerst de *ad hoc* manier.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1: *ad hoc*

- Als $\mathrm{ar}(P) = 0$, dan is $I(P)$ een waarheidswaarde.
- Als $\mathrm{ar}(P) = 1$, dan is $I(P)$ een eigenschap in extensie, i.e. een deelverzameling van het domein: $I(P) \subseteq D$.
- Als $\mathrm{ar}(P) = n \geq 2$, dan is $I(P)$ een relatie in extensie, i.e. een verzameling rijtjes van lengte n van elementen uit het domein: $I(P) \subseteq D^n$.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 2: consequent

In de consequente benadering behandelen we de interpretatie van alle predikaatsymbolen zoals we hierboven de interpretatie van meer-dan-unaire predikaatsymbolen behandelden.

We rijtje van lengte 0, is een één-tupel $\langle d \rangle$. Stel ons domain bestaat uit Jan, Clara en Aslan. Dan zouden we kunnen hebben:

- Ad hoc: $I(P) = \{\text{Clara}, \text{Arslan}\}$,
- Consequent: $I(P) = \{\langle\text{Clara}\rangle, \langle\text{Arslan}\rangle\}$.

Het is duidelijk dat beide stijlen dezelfde informatie verschaffen.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 3: consequent

Er is maar één 0-tupel: ε. De interpretatie van $I(P)$ met $\mathrm{ar}(P) = 0$ zou een verzameling 0-tupels moeten zijn.

Er zijn precies twee verzamelingen 0-tupels: $\emptyset$ en $\{\varepsilon\}$.

We identificeren de waarheidswaarde 0 met $\emptyset$ en de waarheidswaarde 1 met $\{\varepsilon\}$. Hoe meer er in zit hoe waarder.

Overview

Universiteit Utrecht

Interpretatie van de Variabele

Kunnen we de variabele interpreteren als $I(x) = d$, waar $d \in D$? Nee, dan zouden we geen verschil hebben tussen een variabele en een constante.

We voeren een tweede orakel in naast I: de bedeling f. De bedeling is een functie van variabelen naar de objecten uit het domein. Terwijl we het domein vasthouden laten we de bedeling variëren en daarmee de waarde van de variabele.

- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = I(t)$, als t een constante is.
- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = f(t)$, als t een variabele is.

Overview

Interpretatie van Atomaire Formules

Ad hoc:

- Als $\text{ar}(P) = 0$:
  $\mathcal{M}, f \models P$ dan en slechts dan $I(P) = 1$,
- Als $\text{ar}(P) = 1$:
  $\mathcal{M}, f \models Pt$ dan en slechts dan $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} \in I(P)$,
- Als $\text{ar}(P) = n \geq 2$:
  $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$ dan en slechts dan
  $$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$$

Consequent:

- $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$ dan en slechts dan
  $$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$$

0-air: consequent

- ar$(P) = 0$:
  $\mathcal{M}, f \models P$ dan en slechts dan $\varepsilon \in I(P)$
  dan en slechts dan als $I(P) = \{\varepsilon\}$

We hadden besloten $\{\varepsilon\} \approx 1$.

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Interpretatie van Complexe Formules 1

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\bot$	$\mathcal{M}, f \models \bot$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$[\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B]$ of $[\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B]$
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, zodat $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$

Interpretatie van Complexe Formules 2

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{M}, f \not\models Pt_1 \ldots t_n & \Leftrightarrow & \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \notin I(P) \\
\mathcal{M}, f \not\models \bot & \Leftrightarrow & 0{=}0 \\
\mathcal{M}, f \not\models \neg B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \wedge B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ of } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \vee B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B & \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B \\
\mathcal{M}, f \not\models A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & [\mathcal{M}, f \models A \text{ en } \mathcal{M}, f \not\models B] \text{ of} \\
 & & \qquad [\mathcal{M}, f \not\models A \text{ en } \mathcal{M}, f \models B] \\
\mathcal{M}, f \not\models \forall x\, A & \Leftrightarrow & \text{er is een } d \in D \text{, zodat } \mathcal{M}, f[x:d] \not\models A \\
\mathcal{M}, f \not\models \exists x\, A & \Leftrightarrow & \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x:d] \not\models A
\end{array}
$$

Overview

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Geldigheid

Definitie van Geldigheid

Zij een signatuur Σ gegeven.

(i) $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ desda $\mathcal{M}, f \models C$ voor alle $C \in \Gamma$.

(ii) $\Gamma \models A$ desda, voor alle $\mathcal{M}$ in Mod_Σ en voor alle bedelingen f over het domein van $\mathcal{M}$, we hebben $\mathcal{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, f \models A$.

(iii) $A_1, \ldots, A_n \models B$ desda $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

(iv) $\models A$ desda $\emptyset \models A$.

Strijdigheid en Vervulbaarheid

Een verzameling formules Γ is *vervulbaar* of *semantisch consistent* dan en slechts dan als er een model $\mathcal{M}$ is en een bedeling f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$.

Een verzameling formules Γ is of *semantisch inconsistent* dan en slechts dan als er geen model $\mathcal{M}$ is een geen bedeling f is, zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$. Met andere woorden: Γ is strijdig dan en slechts dan als Γ niet vervulbaar is.

Correctheid en Volledigheid

Correctheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

We kunnen de correctheidsstelling ook als volgt formuleren (m.b.v. contrapositie): $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$.

Dit zegt dat als we een tegenvoorbeeld tegen de redenering Γ / A vinden, we daarmee tevens hebben aangetoond dat A niet met natuurlijke deductie uit Γ af te leiden is.

Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Gödel, 1930)

We kunnen de volledigheidsstelling herformuleren tot het Model Existentie Lemma:
Als $\Gamma \nvdash A$, dan is er een model $\mathcal{M}$ en een valuatie f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ en $\mathcal{M}, f \not\models A$.