Inleiding Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

18 oktober, 2012

Universiteit Utrecht

Overview

Overview

Universiteit Utrecht

Overview

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Overview

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Overview

Overview

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Overview

Termen en Formules

We werken met een gegeven signatuur Σ. Een *term* is een constante uit Σ of een variabele.

Een atomaire formule is hetzij $\bot$, hetzij een formule van de vorm $Pt_1 \ldots t_n$, waar P een predicaat is en waar $n = \mathrm{ar}(P)$.

De klasse Form van formules van de predikatenlogische taal $\mathcal{L}_\Sigma$ is gegeven door een inductieve definitie met de volgende regels:

(i) Atom $\subseteq$ Form

(ii) als $A \in$ Form, dan ook $\neg A \in$ Form

(iii) als $A, B \in$ Form, dan ook $(A \wedge B) \in$ Form, $(A \vee B) \in$ Form, $(A \rightarrow B) \in$ Form, $(A \leftrightarrow B) \in$ Form

(iv) als $A \in$ Form, dan ook $\forall x_i\, A \in$ Form, $\exists x_i\, A \in$ Form

Overview

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Model

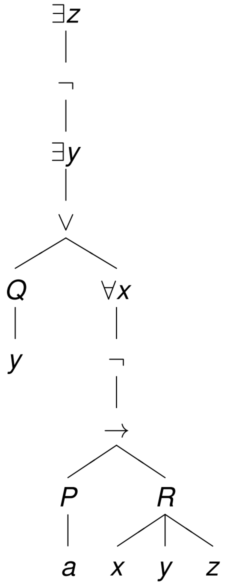
Variabelen

Atomaire Formules

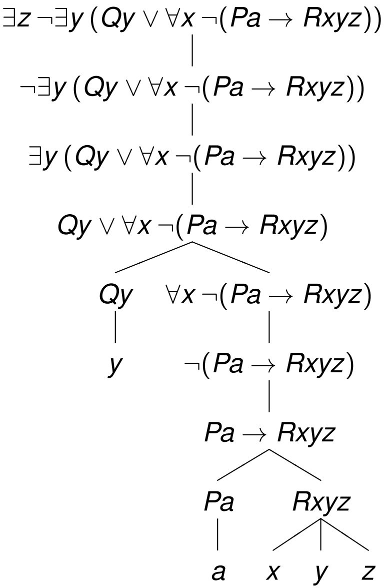
Complexe Formules

Constructieboom

$\exists z \, \neg \exists y \, (Qy \vee \forall x \, \neg (Pa \to Rxyz))$



Geassocieerde Formule



Labels en Voorkomens

We zeggen dat een symbool dat aan de boom in de eerste stijl hangt (predicaatsymbool, constante, variabele, propositioneel voegteken, kwantor) *het korte label* van de knoop is. De formule die aan de boom in de tweede stijl hangt is *het lange label*.

Een *voorkomen* van een predicaatsymbool, constante, ..., in een formule A is een paar $\langle k, \chi \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar χ het korte label is van k. Hier is χ dus het symbool dat een voorkomen heeft.

Een *voorkomen* van een (sub)formule B, in een formule A is een paar $\langle k, B \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar B het lange label is van k.

Subformules en Bereik en Binding

De *subformules* van een formule A zijn de lange labels van de analyseboom van A, m.a.w. het zijn de formules die in A voorkomen. Merk op dat een subformule meerdere malen kan voorkomen.

Stel $\langle k, \chi \rangle$ is een voorkomen van een voegteken of een kwantor. Het bereik van $\langle k, \chi \rangle$ is $\langle k, B \rangle$, waar B het lange label is van k.

Stel $\langle k, Qv \rangle$ is een voorkomen van een kwantor en $\langle \ell, u \rangle$ een voorkomen van een variabele. $\langle k, Qv \rangle$ bindt $\langle \ell, u \rangle$ als u en v identiek zijn en er een neerwaards pad is van k naar ℓ, waarlangs geen andere kwantor $Q'v$ voorkomt.

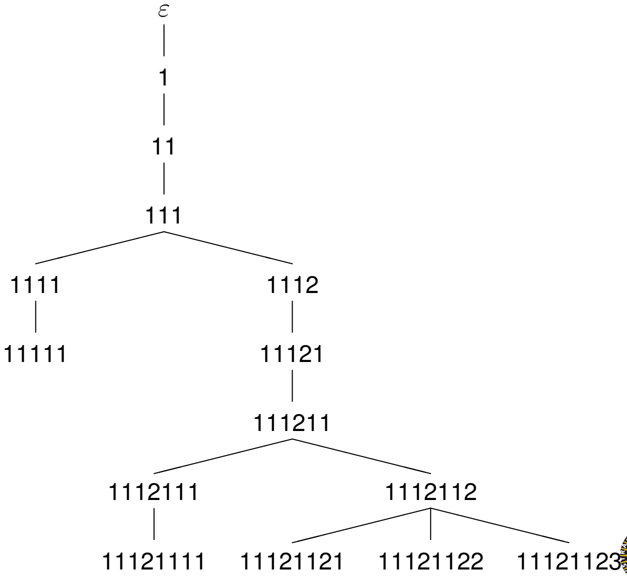
Vrije en Gebonden Voorkomens van Variabelen

Een voorkomen van een variabele is *gebonden* als er een kwantor voorkomen is dat dat voorkomen bindt.

Een voorkomen van een variabele is *vrij* als het niet gebonden is.

Een variabele is *vrij* in een formule als hij een vrij voorkomen heeft.

Systematische Namen van Knopen



Talen van de Predicatenlogica
Bomen, Voorkomens, Binding
Model
Variabelen
Atomaire Formules
Complexe Formules

Universiteit Utrecht

Substitutie

Laat A een formule zijn, t een term (constante of variabele) en x_i een variabele (oftewel $A \in$ Form, $t \in$ Term, $x_i \in$ Var. Dan is $(A)[x_i := t]$ het resultaat van het vervangen van alle vrije voorkomens van x_i in A door t (lees ':=' als 'wordt').

Met recursie:

- $(t')[x_i := t] := t'$, als t niet x_i is,
  $(t')[x_i := t] := t$, als t identiek aan x_i is,
- $(\bot)[x_i := t] := \bot$,
- $(P(t_1, \dots, t_n))[x_i := t] := P(t_1[x_i := t], \dots, (t_n)[x_i := t])$,
- $(\neg A)[x_i := t] := \neg(A)[x_i := t]$,
- $(A \wedge B)[x_i := t] := ((A)[x_i := t] \wedge (B)[x_i := t])$, etc.
- $(\forall x_j\, A)[x_i := t] := \forall x_j\, (A)[x_i := t]$, als $i \neq j$,
  $(\forall x_j\, A)[x_i := t] := \forall x_j\, A$, als $i = j$, etc.

Vrij Voor

- $(Rx \wedge \forall y\,(Px \vee Qy))[x := y] = (Ry \wedge \forall y\,(Py \vee Qy))$.

De variabele y *is vrij voor* x *in* A als geen vrij voorkomen (k, x) van x in het bereik is van een voorkomen (ℓ, Qy) van een kwantor die over y kwantificeert.

Eenvoudiger gezegd: geen door substitutie van y voor x in A gecreëerd voorkomen van y mag gebonden zijn in de resulterende formule $A[x := y]$.

Overview

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1

Een model van Signatuur Σ is een paar $\langle D, I \rangle$, waar D een *niet-leeg* domain is en I de interpretatiefunctie.

I kent aan de constanten van de signatuur objecten uit het domein toe.

Er zijn twee manieren om de interpretatie van de predikaatsymbolen te doen: een *ad hoc* manier die redelijk te begrijpen is en een consequente manier die subtiel is. We behandelen eerst de *ad hoc* manier.

Universiteit Utrecht

Interpretatie van Predikaatsymbolen 1: *ad hoc*

- Als $\mathrm{ar}(P) = 0$, dan is $I(P)$ een waarheidswaarde.
- Als $\mathrm{ar}(P) = 1$, dan is $I(P)$ een eigenschap in extensie, i.e. een deelverzameling van het domein: $I(P) \subseteq D$.
- Als $\mathrm{ar}(P) = n \geq 2$, dan is $I(P)$ een relatie in extensie, i.e. een verzameling rijtjes van lengte n van elementen uit het domein: $I(P) \subseteq D^n$.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 2: consequent

In de consequente benadering behandelen we de interpretatie van alle predikaatsymbolen zoals we hierboven de interpretatie van meer-dan-unaire predikaatsymbolen behandelden.

We rijtje van lengte 0, is een één-tupel $\langle d \rangle$. Stel ons domain bestaat uit Jan, Clara en Aslan. Dan zouden we kunnen hebben:

- Ad hoc: $I(P) = \{\text{Clara}, \text{Arslan}\}$,
- Consequent: $I(P) = \{\langle\text{Clara}\rangle, \langle\text{Arslan}\rangle\}$.

Het is duidelijk dat beide stijlen dezelfde informatie verschaffen.

Interpretatie van Predikaatsymbolen 3: consequent

Er is maar één 0-tupel: ε. De interpretatie van $I(P)$ met $\mathrm{ar}(P) = 0$ zou een verzameling 0-tupels moeten zijn.

Er zijn precies twee verzamelingen 0-tupels: $\emptyset$ en $\{\varepsilon\}$.

We identificeren de waarheidswaarde 0 met $\emptyset$ en de waarheidswaarde 1 met $\{\varepsilon\}$. Hoe meer er in zit hoe waarder.

Overview

Interpretatie van de Variabele

Kunnen we de variabele interpreteren als $I(x) = d$, waar $d \in D$? Nee, dan zouden we geen verschil hebben tussen een variabele en een constante.

We voeren een tweede orakel in naast I: de bedeling f. De bedeling is een functie van variabelen naar de objecten uit het domein. Terwijl we het domein vasthouden laten we de bedeling variëren en daarmee de waarde van de variabele.

- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = I(t)$, als t een constante is.
- $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} = f(t)$, als t een variabele is.

Overview

Interpretatie van Atomaire Formules

Ad hoc:

- Als $\mathrm{ar}(P) = 0$:
  $\mathcal{M}, f \models P$ dan en slechts dan $I(P) = 1$,
- Als $\mathrm{ar}(P) = 1$:
  $\mathcal{M}, f \models Pt$ dan en slechts dan $[\![t]\!]_{\mathcal{M},f} \in I(P)$,
- Als $\mathrm{ar}(P) = n \geq 2$:
  $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$ dan en slechts dan
  $$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$$

Consequent:

- $\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$ dan en slechts dan
  $$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P).$$

0-air: consequent

- $\mathrm{ar}(P) = 0$:
  $\mathcal{M}, f \models P$ dan en slechts dan $\varepsilon \in I(P)$
  dan en slechts dan als $I(P) = \{\varepsilon\}$

We hadden besloten $\{\varepsilon\} \approx 1$.

Overview

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

Model

Variabelen

Atomaire Formules

Complexe Formules

Interpretatie van Complexe Formules

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \ldots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\bot$	$\mathcal{M}, f \models \bot$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	[$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$] of [$\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B$]
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x:d] \models A$