

College Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

15 oktober, 2012

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Syntaxis

De eerste ronde:

- ▶ Constanten: a, b, c, d, \dots
- ▶ Variabelen: x, y, z, \dots
- ▶ Predicaatsymbolen: $P, Q(x), R(x, y), T(x, y, z), \dots$
- ▶ Propositionele logische voegtekens: $\perp, \neg, \wedge, \dots$
- ▶ Formules: $((Q(x) \vee \neg R(y, a)) \wedge T(x, a, y))$

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Eerste ronde en eerste benadering:

- ▶ Een niet leeg domein D
- ▶ Constanten staan voor elementen van het domein
- ▶ Variabelen nemen verschillende waarden uit het domein aan
- ▶ Propositionele logische voegtekens betekenen hetzelfde als in de propositielogica
- ▶ Formules nemen waarheidswaarden als waarde aan afhankelijk van welke waarden we aan de variabelen geven

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Variabelen en Kwantoren

- ▶ Variabelen: x, y, z, u, v, \dots
- ▶ \forall : universele kwantor, voor alle kwantor.
- ▶ \exists : existentiële kwantor, er is kwantor.

- ▶ Betekenis $\forall x$: voor alle objecten x in het domein zodat ...
- ▶ Betekenis $\exists x$: er is tenminste één object x in het domein zodat ...

Voorbeelden: $\exists x \forall y Rxy, \forall x (Qx \rightarrow Px)$.

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Bereik en Binding

$$(i) \quad \underline{\forall x \exists y Kxy}$$

$$(ii) \quad \underline{\underline{\forall x \neg \exists y \forall z (Hx \rightarrow Txyz)}}$$

$$(iii) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow Lj)}$$

$$(iv) \quad \underline{\forall x Hx} \rightarrow Lj$$

$$(v) \quad \underline{\exists x Hj} \rightarrow (\underline{\forall x (Hx \rightarrow Lx)} \rightarrow Rxj)$$

$$(vi) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow \exists x Lx)}$$

$$(vii) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow \exists y Ly)}$$

$$(i.) \quad \underline{\underline{\forall x \exists y Kxy}}$$

$$(ii.) \quad \underline{\underline{\forall x \neg \exists y \forall z (Hz \rightarrow Tzyx)}}$$

$$(iii.) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow Lj)}$$

$$(iv.) \quad \underline{\forall x Hx} \rightarrow Lj$$

$$(v.) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow \exists x Lx)}$$

$$(vi.) \quad \underline{\forall x (Hx \rightarrow \exists y Ly)}$$

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Bereik en Binding 2

Een voorkomen van een variabele in een formule is *gebonden* als hij in het bereik van een kwantor voorkomt die de direct gevolgd wordt door dezelfde variabele (qua type). Een voorkomen is *vrij* als het niet gebonden is.

Een formule is een *zin* als hij geen vrije variabele voorkomens bevat.

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

**Talen van de
Predicatenlogica**

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Signatuur

Een signatuur Σ is een rijtje $\langle \text{Pred}, \text{Con}, \text{ar} \rangle$. Hier is Pred de verzameling predicaatsymbolen, Con de verzameling constanten en ar de ariteits functie. De functie ar kent aan elk symbool P uit Pred een natuurlijk getal $\text{ar}(P)$, de ariteit van P , toe.

We zullen meestal aannemen dat Pred en Con eindig zijn.

Bijvoorbeeld: $\langle \{K, S\}, \{i, j\}, \text{ar} \rangle$,
waar $\text{ar}(K) = 1$ en $\text{ar}(S) = 2$.

Hier zou K kunnen staan voor *kapper zijn* en S voor *scheren*, De constante i zou kunnen staan voor *mij* en de constante j voor *Janssens*.

Formule uit deze signatuur:

$$\forall x (Kx \rightarrow (\neg Sxx \wedge Sxj)) \vee Kij.$$

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Voegtekens

Het alfabet van de predikatenlogische taal \mathcal{L}_Σ die gebaseerd is op Σ bestaat uit de volgende symbolen:

- ▶ de predikaatsymbolen uit Pred,
- ▶ de constanten uit Con,
- ▶ variabelen(oneindig veel): x_1, x_2, x_3, \dots
- ▶ voegtekens: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp$
- ▶ kwantoren: \forall, \exists
- ▶ haakjes: $(,)$
- ▶ de komma: $,$

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Termen en Formules

We werken met een gegeven signatuur Σ . Een *term* is een constante uit Σ of een variabele.

Een atomaire formule is hetzij \perp , hetzij een formule van de vorm $Pt_1 \dots t_n$, waar P een predicaat is en waar $n = \text{ar}(P)$.

De klasse Form van formules van de predikatenlogische taal \mathcal{L}_Σ is gegeven door een inductieve definitie met de volgende regels:

- (i) $\text{Atom} \subseteq \text{Form}$
- (ii) als $A \in \text{Form}$, dan ook $\neg A \in \text{Form}$
- (iii) als $A, B \in \text{Form}$, dan ook $(A \wedge B) \in \text{Form}$, $(A \vee B) \in \text{Form}$,
 $(A \rightarrow B) \in \text{Form}$, $(A \leftrightarrow B) \in \text{Form}$
- (iv) als $A \in \text{Form}$, dan ook $\forall x_j A \in \text{Form}$, $\exists x_j A \in \text{Form}$

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Overview

De Ingrediënten van de Predikatenlogica

Talen van de Predicatenlogica

Bomen, Voorkomens, Binding

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

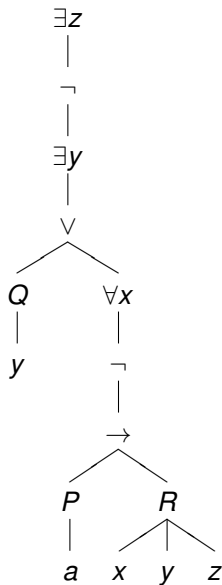
Talen van de
Predicatenlogica

**Bomen,
Voorkomens,
Binding**



Constructieboom

$$\exists z \neg \exists y (Qy \vee \forall x \neg (Pa \rightarrow Rxyz))$$



De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

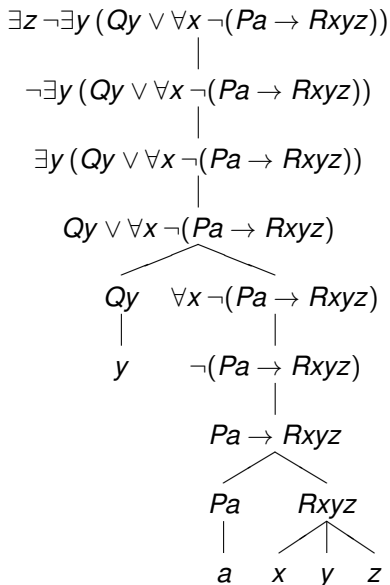
Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Geassocieerde Formule



De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Labels en Voorkomens

We zeggen dat een symbool dat aan de boom in de eerste stijl hangt (predicaatsymbool, constante, variabele, propositioneel voegteken, kwantor) *het korte label* van de knoop is. De formule die aan de boom in de tweede stijl hangt is *het lange label*.

Een *voorkomen* van een predicaatsymbool, constante, \dots , in een formule A is een paar $\langle k, \chi \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar χ het korte label is van k . Hier is χ dus het symbool dat een voorkomen heeft.

Een *voorkomen* van een (sub)formule B , in een formule A is een paar $\langle k, B \rangle$, waar k een knoop is in de analyseboom van A en waar B het lange label is van k .

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Subformules en Bereik en Binding

De *subformules* van een formule A zijn de lange labels van de analyseboom van A , m.a.w. het zijn de formules die in A voorkomen. Merk op dat een subformule meerdere malen kan voorkomen.

Stel $\langle k, \chi \rangle$ is een voorkomen van een voegteken of een kwantor. Het bereik van $\langle k, \chi \rangle$ is $\langle k, B \rangle$, waar B het lange label is van k .

Stel $\langle k, Qv \rangle$ is een voorkomen van een kwantor en $\langle \ell, u \rangle$ een voorkomen van een variabele. $\langle k, Qv \rangle$ bindt $\langle \ell, u \rangle$ als u en v identiek zijn en er een neerwaards pad is van k naar ℓ , waarlangs geen andere kwantor $Q'v$ voorkomt.

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Vrije en Gebonden Voorkomens van Variabelen

Een voorkomen van een variabele is *gebonden* als er een kwantor voorkomen is dat dat voorkomen bindt.

Een voorkomen van een variabele is *vrij* als het niet gebonden is.

Een variabele is *vrij* in een formule als hij een vrij voorkomen heeft.

De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

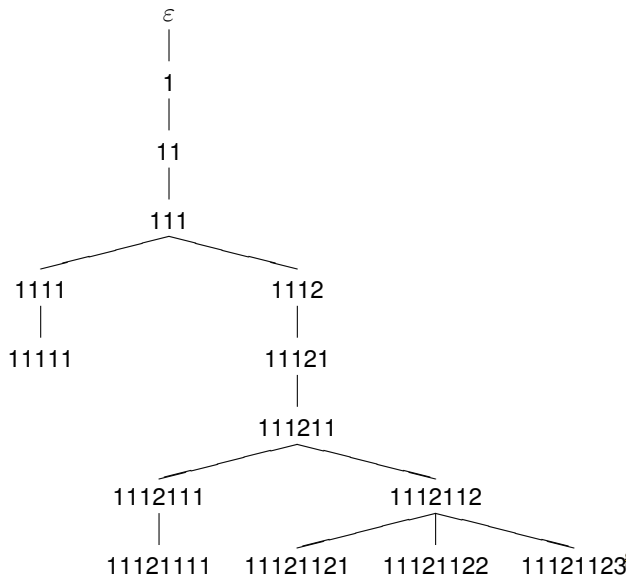
Talen van de
Predicatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht

Systematische Namen van Knopen



De Ingrediënten van
de Predikatenlogica

Talen van de
Predikatenlogica

Bomen,
Voorkomens,
Binding



Universiteit Utrecht