Natuurlijke deductie

- syntax voor bewijzen in propositielogica
- syntax = afleidingsbomen
- boom modelleert hypothetische redenering
- bladeren = aannames (0,1 of meer)
- vertakking = redeneerstap
- wortel = conclusie (precies 1)

ND: syntax vs. semantiek

- $A_1,...,A_n \vdash B$
- er is een afleidingsboom met (niet ingetrokken) aannames (dwz bladeren) $A_1,...,A_n$ `en conclusie (dwz wortel) B
- afleidingsregels `voeren waarheden in een nieuwe waarheid' over
- $A_1,...,A_n \models B$ (correctheid (na te streven))

Redeneerstap

- redeneerstap instantie van redeneerschema
- per connectief introductie en eliminatieschema
- introductieschema = introduceer dat connectief als hoofdconnectief in formule
- eliminatieschema = verwijder/elimineer dat hoofdconnectief uit formule

ND: conjunctie

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

Eliminatie (links)

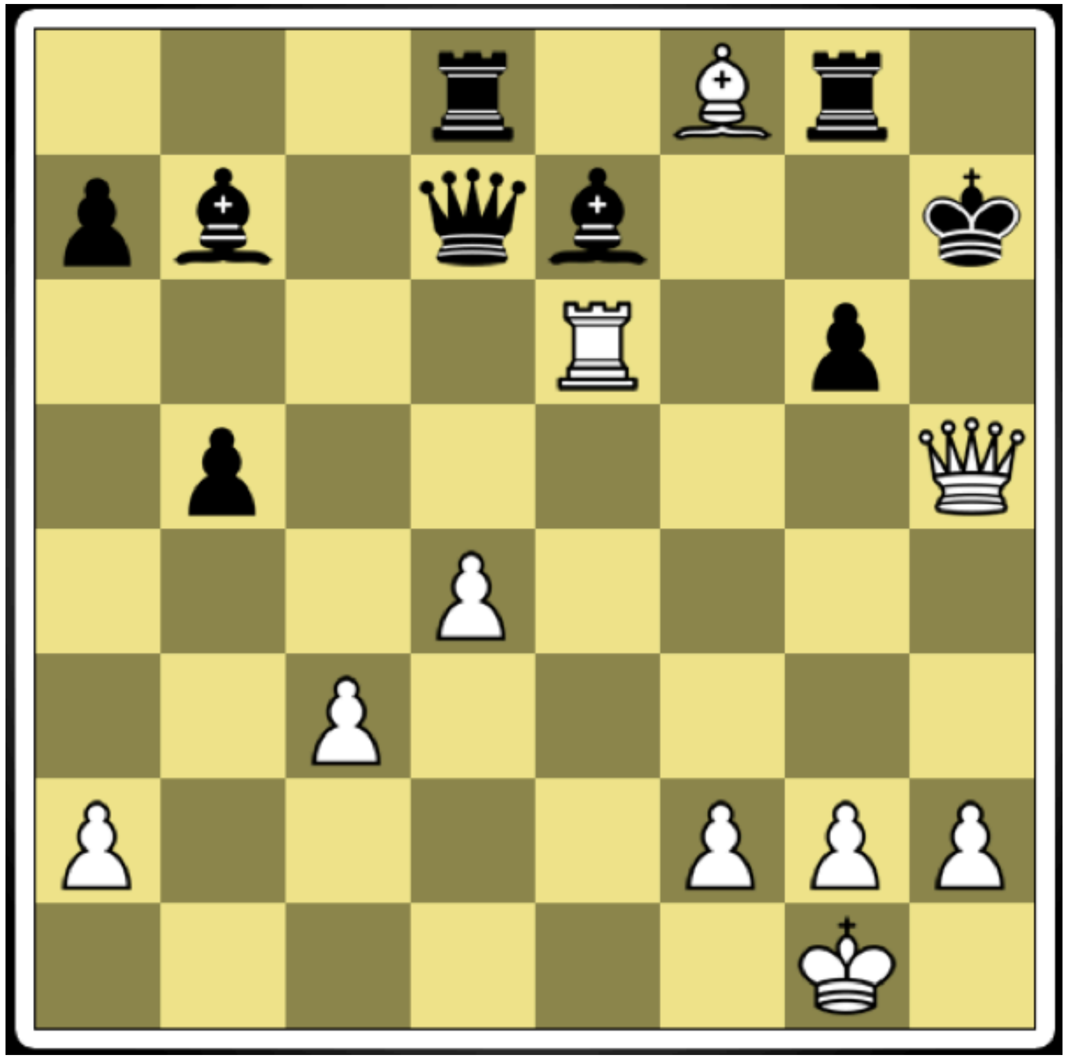
$$\frac{A \wedge B}{B}$$

Eliminatie (rechts)

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

Introductie

Implicatie



zwart zet → wit kan mat geven?

ND:implicatie

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \to\mathrm{E}$$

Eliminatie

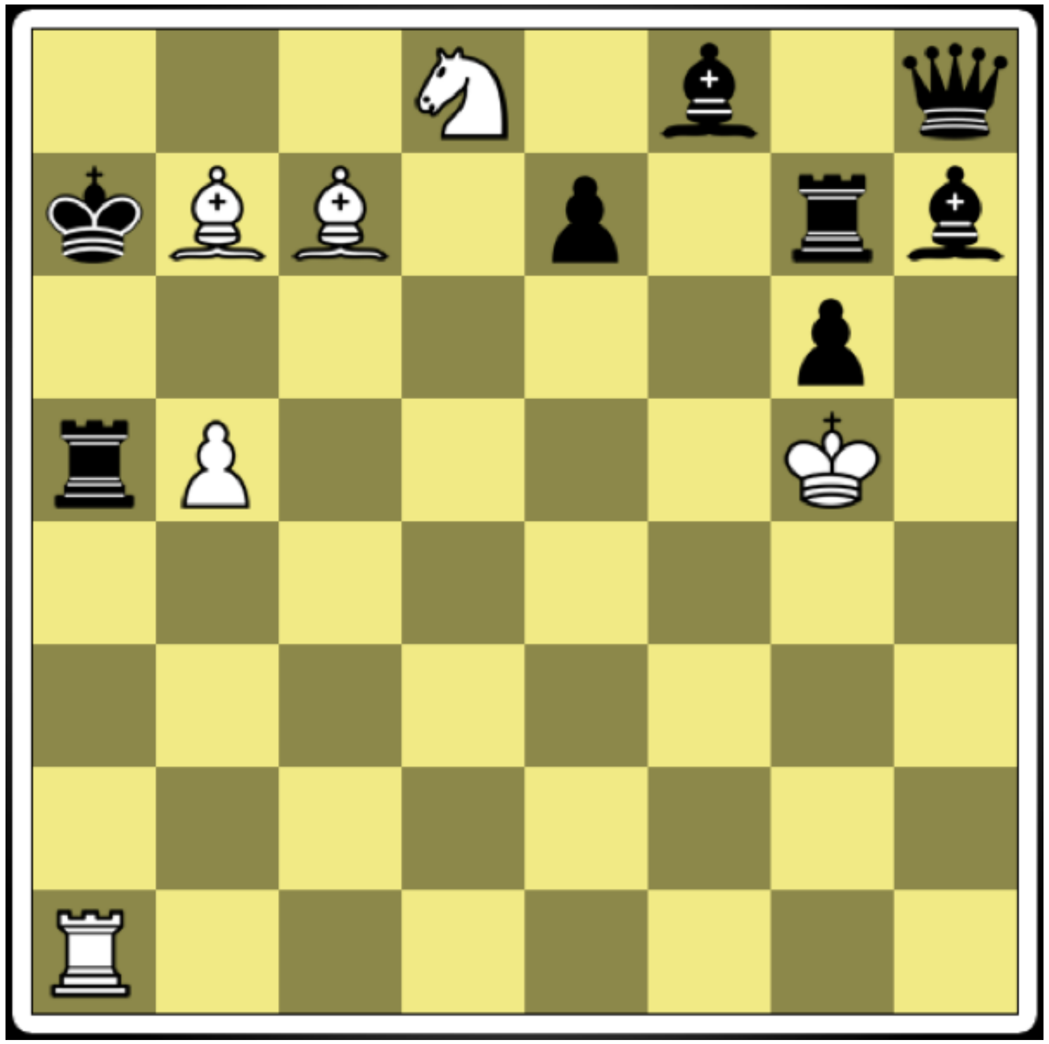
$$\begin{array}{c} [A] \\ \\ \dfrac{B}{A \to B} \end{array}$$

Introductie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

Intrekken hypothesen

- Label intrekkende regelinstantie op unieke wijze, b.v. met een getal n
- Bepaal de in te trekken hypothesen (moeten van de goede vorm zijn, en niet ingetrokken)
- Zet rechte haken om de in te trekken hypothesen en label met n

Disjunctie



wat zwart zet → wit kan mat geven?

ND:disjunctie

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$$

Eliminatie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

$$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \dfrac{B}{A \vee B}$$

Introductie (links) Introductie (rechts)

ND: negatie

$$\frac{A \quad \neg A}{\bot}$$

Eliminatie

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \bigtriangledown \\ \bot\end{array}}{\neg A}$$

Introductie (intrekken hypothesen (0,1 of meer))

ND:falsum

$$\frac{\perp}{A}$$

Eliminatie

Introductie

reductio ad absurdum

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \nabla \\ \bot\end{array}}{A}$$

Volledigheidsstelling

- (B is een semantisch gevolg van $A_1,...,A_n$) dan en slechts dan (als B afleidbaar uit $A_1,...,A_n$)
- $A_1,...,A_n \models B$ dan en slechts dan als $A_1,...,A_n \vdash B$
- $\models$ = $\vdash$ (semantiek vs. syntax)
- $\models$ als $\vdash$ (correctheid, soundness)
- $\models$ dan $\vdash$ (volledigheid, completeness)

Correctheid

- Verzameling afleidingsbomen inductief gedefd
- Schema's voor connectieven als constructies
- als $A_1,\ldots,A_n \vdash B$ dan $A_1,\ldots,A_n \vDash B$, bewijs met inductie naar de afleidingsboom
- v.b. $A_1,\ldots,A_n \vdash B \wedge C$