Overzicht

- semantisch gevolg via vervulbaarheid (yices)
- substitutie (syntactisch vervangen)
- equivalentie (dis/conjunctieve/xor normaalvorm)
- functionele volledigheid (redux)

FOR-classificiatie via SAT

- A tautologie desda ¬A onvervulbaar
- A contingent desda zowel A als ¬A vervulbaar
- A contradictie desda A onvervulbaar

Semantisch gevolg

- def: $V \models \Gamma$ als $V \models A$ voor alle $A \in \Gamma$
- def: $\Gamma \models A$ als voor alle V, als $V \models \Gamma$ dan $V \models A$
- stelling: $A \models B$ dan en slechts dan als $\models A \rightarrow B$
- stelling: $\models A \rightarrow B$ desda $A \rightarrow B$ tautologie
- stelling: $A \rightarrow B$ tautologie desda $\neg(A \rightarrow B)$ contr.
- stelling: $\neg(A \rightarrow B)$ equivalent aan $(A \wedge \neg B)$, unsat?

yices demo

Substitutie recursief (Def 7.1.1)

- $(p_i)[p_i{:=}C] := C$
- $(p_{j)}[p_i{:=}C] := p_j$ als i ongelijk j
- $(\perp)[p_i{:=}C] := \perp$
- $(\neg A)[p_i{:=}C] := \neg(A[p_i{:=}C])$
- $(A\square B)[p_i{:=}C] := (A[p_i{:=}C]\square B[p_i{:=}C])$

Substitutie

- ik word nat omdat het regent
- (ik word nat omdat het regent)[het regent:=ik onder de douche sta]
- ik word nat omdat ik onder de douche sta
- q omdat p
- (q omdat p)[p:=p’] = q omdat p’
- `omdat’ is niet waarheidsdefiniet

Substitutiestelling

- vervanging van een deelformule door een equivalente formule verandert waarheidswaarde niet
- als $V(A) = V(B)$ dan $V((C)[p_i{:=}A]) = V((C)[p_i{:=}B])$
- bewijs? met inductie over C

Equivalentie

- def: A en B zijn equivalent als B een semantisch gevolg is van A en andersom
- def: A Eq B als $A \models B$ en $B \models A$
- stelling: A Eq B als $V(A) = V(B)$ voor alle V
- stelling: A Eq B als A,B zelfde waarheidstafel

Vervangen door Equivalenten(Herschrijven)

Stelling 3.14: Het vervangen van een formule door een equivalente verandert de valuatie/waarheidstafel niet.

DNV equivalenties

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A$ Eq A
- $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B)$ Eq $(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \wedge A$ Eq A
- $A \vee A$ Eq A

DNV herschrijven $\rightsquigarrow$

- $(A \leftrightarrow B) \rightsquigarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow (\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A \rightsquigarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C) \rightsquigarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $(B \vee C) \wedge A \rightsquigarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$
- $A \wedge A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)
- $A \vee A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)

DNV herschrijven vb

$$(\neg p \leftrightarrow q) \rightsquigarrow$$

$$((\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow$$

$$((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$(((p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((p \vee q) \wedge \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$

$$(((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)))$$

Disjunctieve normaalvorm

Definitie: Formule is in/een disjunctieve normaalvorm (DNV) als hij niet verder herschreven kan worden

Stelling: de formule A is in DNV dan en slechts dan als in de afleidingsboom disjuncties alleen boven conjuncties, en conjuncties alleen boven negaties voorkomen

Stelling: voor iedere A is er een A' in DNV zdd A Eq A'

Herbrand equivalenties

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(A \wedge B)+A+\top$
- $(A \vee B)$ Eq $(A \wedge B)+A+B$
- $A \wedge (B+C)$ Eq $(A \wedge B)+(A \wedge C)$
- $\neg A$ Eq $A+\top$
- $A+\bot$ Eq A
- $A+A$ Eq A
- $A \wedge \bot$ Eq $\bot$
- $A \wedge \top$ Eq A
- $A \wedge A$ Eq A

Herbrand herschrijven $\rightsquigarrow$

- $(A \leftrightarrow B) \rightsquigarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow (A \wedge B) + A + \top$
- $(A \vee B) \rightsquigarrow (A \wedge B) + A + B$
- $A \wedge (B + C) \rightsquigarrow (A \wedge B) + (A \wedge C)$
- $\neg A \rightsquigarrow A + \top$
- $A + \bot \rightsquigarrow A$
- $A + A \rightsquigarrow \bot$
- $A \wedge \bot \rightsquigarrow \bot$
- $A \wedge \top \rightsquigarrow A$
- $A \wedge A \rightsquigarrow A$
- modulo associativiteit en commutativiteit van $+, \wedge$

HNV herschrijven vb

$\neg p \leftrightarrow q \rightsquigarrow (\neg p \to q) \land (q \to \neg p) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((\neg p \land q) + \neg p + \top) \land ((\neg q \land p) + \neg q + \top) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(((p + \top) \land q) + p + \top + \top) \land (((q + \top) \land p) + q + \top + \top) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$(((p + \top) \land q) + p + \bot) \land (((q + \top) \land p) + q + \bot) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$(((p + \top) \land q) + p) \land (((q + \top) \land p) + q) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((p \land q) + (\top \land q) + p) \land ((q \land p) + (\top \land p) + q) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$

$((p \land q) + q + p) \land ((q \land p) + p + q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(p \land q \land q \land p) + (p \land q \land p) + (p \land q \land q) + (q \land q \land p) +$

$(q \land p) + (q \land q) + (p \land q \land p) + (p \land p) + (p \land q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow$

$(p \land q) + (p \land q) + (p \land q) + (q \land p) +$

$(q \land p) + q + (q \land p) + p + (p \land q) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow q + p$

HNV

- Stelling: voor alle A er is een A’ in HNV met A Eq A’
- Stelling: als A in HNV en tautologie dan A = $\top$
- Stelling: als A in HNV en contradictie dan A= $\perp$

Functionele volledigheid

Stelling: voor iedere waarheidsdefiniet voegteken is er een equivalente formule