TOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI
DINSDAG, 8 NOVEMBER, 2011, 17.15-20.15,
UNNIK GROEN EN RUPPERT 042

Zet op elke blad uw naam en studentnummer. Er zijn vijf opgaven. De bonusvragen zijn optioneel. Aanbeveling: bewaar de bonusvragen voor het laatst. Je kunt in het totaal 100 punten halen voor de niet-bonus vragen. 100 punten betekent een 10 voor de toets. *Geef altijd uitleg.*

Pas op! Dit blaadje heeft twee kanten.

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling bestaande uit Kuifje, Kapitein Haddock, Jansen, Janssen, Bianca Castafiore. (Om verkeerd lezen te voorkomen: het woord 'die' in de volgende zinnen is steeds het onderwerp van de bijzin die ermee begint.)

a. Janssen verdenkt Kuifje en Jansen verdenkt Kapitein Haddock. (2pt)

b. Iedereen die Kuifje verdenkt, verdenkt ook Haddock. (4pt)

c. Iedereen die iemand verdenkt, verdenkt Bianca Castafiore of Kuifje. (4pt)

d. Iedereen die iemand verdenkt, verdenkt iedereen. (4pt)

e. Een zangeres verdenkt iedereen die iemand verdenkt die Kuifje verdenkt. (6pt)

2. Syntaxis

Zij A de formule $\exists x\, \exists y\, \exists z\, (Pxyz \vee (Qxy \wedge \forall x\, (Qxy \rightarrow \exists z\, Pxzz)))$.

a. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (5pt)

b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (6pt)

c. Geef beide voorkomens van Qxy in officiële notatie. (4pt)

d. In de gekozen notatie van voorkomens kunnen bijvoorbeeld niet de voorkomens van de string '$(Qx$' bescheven worden. Waarom niet? Is dit een nadeel van deze benadering van voorkomens? Kunt u een notatiesysteem bedenken waarin de voorkomens van '$(Qx$' wel beschreven kunnen worden? (5pt)

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \{c\}, \mathsf{ar} \rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(Q) = 2$.

a. Zij $A := \exists x\,(Px \wedge \forall y\, Qxy)$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (8pt)

b. Zij $B := (\exists x Px \wedge \forall y\,(Py \to \exists z\,(Pz \wedge Qyz)))$. Leg in woorden uit wat B zegt over een model van signatuur Σ. Geef een model van B met zo weinig mogelijk elementen. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

c. Laat zien dat $\forall x\,(Px \vee \exists y\, Qxy) \not\models \exists x\,(Px \vee Qxx)$. *U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven.* (6pt)

d. *Bonus:* Geef een zin van signatuur Σ die alleen maar oneindige modellen heeft.

4. Natuurlijke Deductie

Geef ND bewijzen van de volgende stellingen.

a. $\forall x\,(Px \wedge Qx) \vdash \forall y\, Py \wedge \exists z\, Qz$. (6pt)

b. $\exists x\, \forall y\, Pxy \vdash \exists x\, \exists y\,(Pxy \vee Qxy)$. (6pt)

c. $\exists x\, \exists y\, Pxy \vdash \exists y\, \exists x\,(Pxy \vee \forall z\, Qxz)$. (8pt)

d. *Bonus:* $\forall x \forall y \forall z\,((Qxz \wedge Qzy) \to Qxy), \forall x \forall y\,(Qxy \to Qyx), \exists y\, Qcy \vdash Qcc$.

5. Gemengd

a. Formuleer de correctheidsstelling en de volledigheidsstelling voor de predikatenlogica. (4pt)

b. Geef een definitie van logische equivalentie. (4pt)

c. Laat zien dat $\exists x\, Px \not\models \forall z\, Pz$? Waarom volgt hieruit dat $\exists x\, Px \nvdash \forall z\, Pz$? (6pt)

d. Wat is er mis met het volgende 'bewijs' dat pretendeert te laten zien dat $\forall x\, \exists y\, Pxy \vdash \exists y\, \forall x\, Pxy$? (6pt)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, \exists y\, Pxy}{\exists y\, Pxy}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[Pxy]^1}{\forall x\, Pxy}\,\forall\mathrm{I}}{\exists y\, \forall x\, Pxy}\,\exists\mathrm{I}}{\exists y\, \forall x\, Pxy}\,\exists\mathrm{E}, 1$$