EINDTOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI
VRIJDAG, 12 NOVEMBER, 14.00-17.00U,
RUPPERT WIT + BLAUW

SAMENVATTING. Zet op elke blad uw naam en collegekaartnummer. Er zijn vijf opgaven. De bonusvragen zijn optioneel. Aanbeveling: bewaar de bonusvragen voor het laatst. Je kunt in totaal 50 punten halen, voor de niet-bonus vragen. 50 punten betekent een 10 voor het tentamen. *Geef altijd uitleg.*

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de kennissen van Joop.

a. Joop houdt van Mo. (1pt)

b. Iemand houdt van Joop maar Mo houdt niet van hem. (2pt)

c. Iedereen die van Koos houdt, houdt ook van Joop. (2pt)

d. Koos houdt zowel van Joop als van Mo maar er is iemand die van minstens één van beide niet houdt en die wel van Koos houdt. (2pt)

e. Er is hoogstens één persoon die van Koos houdt.[1] (3pt)

2. Syntaxis

Zij A de formule $\forall x\, \exists y\, Pxy \to \forall x \exists y(Pxy \wedge \forall z(Pxz \to Qzy))$.

a. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (2.5pt)

b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (3pt)

c. Geef beide voorkomens van Pxy in officiële notatie. (2pt)

d. Transformeer formula A naar prenex normaalvorm. (4.5pt)

   Je mag gebruik maken van de volgende regels, als x niet vrij in ψ is.

   1. $(\forall x\varphi) \to \psi$ is equivalent met $\exists x(\varphi \to \psi)$
   2. $(\exists x\varphi) \to \psi$ is equivalent met $\forall x(\varphi \to \psi)$
   3. $\psi \to (\exists x\varphi)$ is equivalent met $\exists x(\psi \to \varphi)$
   4. $\psi \to (\forall x\varphi)$ is equivalent met $\forall x(\psi \to \varphi)$

[1] Hint: om dit te zeggen heeft u een binair predikaatsymbool voor *identiteit* nodig.

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \{c\}, \mathsf{ar}\rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(Q) = 2$.

a. Zij $A := \forall x\,(Qxx \leftrightarrow \neg Px)$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (4pt)

b. Zij $B := P(c) \wedge \forall x\,(Px \to \forall y\,(Qxy \to \neg Py))$. Leg in woorden uit wat B ons vertelt over een model $\langle D, I\rangle$. Wat is het minimale aantal elementen dat het domein van een model dat B waar maakt kan hebben? (3pt)

c. Laat zien dat $\forall x\,(Qxx \leftrightarrow \neg Px) \not\models \forall x Qxx \leftrightarrow \exists x \neg Px$. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (3pt)

4. Natuurlijke Deductie

Geef natuurlijkedeductiebewijzen van de volgende stellingen.

a. $\exists x \forall y\, Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$. (3pt)

b. $\forall x\, Qxx \vdash \forall x\, \exists y Qxy$. (3pt)

c. $\forall x\, \exists y\, Rxy, \forall x \forall y\,(Rxy \to Ryx) \vdash \forall x\, \exists y\,(Rxy \wedge Ryx)$. (4pt)

d. *Bonus:* $\forall x Px \to Q \vdash \exists x(Px \to Q)$. Je mag gebruik maken van de regel $\dfrac{\neg\forall x \neg Ax}{\exists x Ax}$. (3pt)

5. Gemengd

a. Laat zien dat $\exists x\, Px, \exists x\, Qx \nvdash \exists x\,(Px \wedge Qx)$. U hoeft geen gedetailleerde berekening te geven. (3pt)

b. Waarom volgt hier uit dat $\exists x\, Px, \exists x\, Qx \not\models \exists x\,(Px \wedge Qx)$? (3pt)

c. Wat is er mis met het volgende 'bewijs' dat pretendeert te laten zien dat $\exists x\, Px \to (\exists x\, Qx \to \exists x\,(Px \wedge Qx))$? (4pt)

$$
\dfrac{\exists x\, Qx \qquad \dfrac{\exists x\, Px \qquad \dfrac{\dfrac{[Py]^1 \qquad [Qy]^2}{Py \wedge Qy}\,\wedge\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 1}{\exists x\,(Px \wedge Qx)}\,\exists\mathrm{E}, 2
$$