EINDTOETS INLEIDING LOGICA VOOR CKI DINSDAG, 9 NOVEMBER, 17.00-20.00U, RUPPERT WIT + BLAUW

SAMENVATTING. Zet op elke blad uw naam en collegekaartnummer. Er zijn vijf opgaven. De bonusvragen zijn optioneel. Aanbeveling: bewaar de bonusvragen voor het laatst. Je kunt in het totaal 50 punten halen, voor de niet-bonus vragen. 50 punten betekent een 10 voor het tentamen. *Geef altijd uitleg.*

1. Vertalingen

Vertaal de onderstaande zinnen zo nauwkeurig mogelijk in de taal van de predikatenlogica. Vergeet de vertaalsleutel niet. Gebruik zo weinig mogelijk predikaatsymbolen. Het discussiedomein is de verzameling van de Nederlandse kerktorens. 'Hoger dan' wordt hier gelezen als 'strikt hoger dan'.

a. De Domtoren is hoger dan de Martinitoren. (1pt)

b. Elke toren die lager is dan de Lange Jan is lager dan de Domtoren. (2pt)

c. De Domtoren en de Martinitoren zijn allebei hoger dan de Lange Jan, maar er zijn torens die hoger zijn dan elk van beide. (2pt)

d. De Domtoren en de Martinitoren zijn even hoog. (2pt)

e. De Domtoren is de hoogste kerktoren van Nederland.[1] (3pt)

2. Syntaxis

Zij A de formule $\forall x\, \exists y\, (Pxyz \to (Qxy \wedge \neg \exists x\, Qxy))$.

a. Geef de ontleedboom van A met korte labels en de ontleedboom van A met lange labels. (2.5pt)

b. Welke kwantorvoorkomens in A binden welke variabelevoorkomens? (3pt)

c. Geef beide voorkomens van Qxy in officiële notatie. (2pt)

d. Wij hebben ervoor gekozen voorkomens te beschrijven als paren van knopen in de ontleedboom van een formule en labels. We zouden voorkomens ook kunnen beschrijven, direct in termen van de formule zonder naar de ontleedboom te kijken, als paren (n, m), waar n de plaats is van het eerste symbool van het betreffende voorkomen in de formule en m de plaats is van het laatste symbool (van links naar rechts tellend). Hierbij beschouwen we een variabele als één symbool.[2] Bijvoorbeeld de voorkomens van Qxy in A zouden dan $(12, 14)$ en

[1] Hint: om dit te zeggen heeft u een binair predikaatsymbool voor *identiteit* nodig.

[2] We tellen haakjes wel en we tellen, bijvoorbeeld, $\forall x_{17}$ als twee symbolen.

$(19, 21)$ zijn. Geef een voordeel en een nadeel van deze alternatieve beschrijving. (2.5pt)

e. *Bonus:* Stel we zijn alleen geïnteresseerd in formulevoorkomens. Zouden we dan ook kunnen volstaan met een representatie van voorkomens die alleen de plaats geeft van het eerste symbool in de formule van dat formulevoorkomen? Bijvoorbeeld de voorkomens van Qxy in A zouden dan 12 en 19 zijn. (2pt)

3. Modellen

Bezie de signatuur $\Sigma = \langle \{P, Q\}, \{c\}, \mathsf{ar} \rangle$, waar $\mathsf{ar}(P) = 1$, $\mathsf{ar}(Q) = 2$.

a. Zij $A := \forall x\,(P(x) \to \exists y\, Q(x, y))$. Geef een model $\mathcal{M}$ waarin A waar is en een model $\mathcal{N}$ waarin A onwaar is. Teken pijldiagrammen van deze modellen. Geef een verificatie met behulp van de semantische regels van de waarheid van A in $\mathcal{M}$ en de onwaarheid van A in $\mathcal{N}$. (4pt)

b. Zij $B := (P(c) \wedge \forall x\,(P(x) \to \exists y\,(Q(x, y) \wedge P(y))))$. Leg in woorden uit wat B ons vertelt over een model $\langle D, I \rangle$. Wat is het minimale aantal elementen dat het domein van een model dat B waar maakt kan hebben? (3pt)

c. Laat zien dat $\forall x\,(P(x) \to \exists y\, Q(x, y)) \not\models \exists y\, \forall x\,(P(x) \to Q(x, y))$. U hoeft geen gedetailleerde berekeningen te geven. (3pt)

4. Natuurlijke Deductie

Geef natuurlijkedeductiebewijzen van de volgende stellingen.

a. $\exists x\,(P \wedge Qx) \vdash P \wedge \exists x\, Qx$. (3pt)

b. $\exists y\, Py \vdash \forall x\, \exists y\,(Py \vee Qx)$. (3pt)

c. $\forall x\, \exists y\, Rxy \vdash \forall u\, \exists v\, \exists w\,(Ruv \wedge Rvw)$. (4pt)

d. *Bonus:* $\exists y\, \forall x\,(Exy \leftrightarrow \neg Exx) \vdash \bot$. (3pt)

5. Gemengd

a. Laat zien dat $\exists x\, Px \not\models \forall z\,(Qz \to \exists x\,(Px \wedge Qx))$. U hoeft geen gedetailleerde berekening te geven. (3pt)

b. Waarom volgt hier uit dat $\exists x\, Px \nvdash \forall z\,(Qz \to \exists x\,(Px \wedge Qx))$? (3pt)

c. Wat is er mis met het volgende 'bewijs' dat pretendeert te laten zien dat $\exists x\, Px \vdash \forall z\,(Qz \to \exists x\,(Px \wedge Qx))$? (4pt)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x\, Px$}
\AxiomC{$[Py]^1$}
\AxiomC{$[Qy]^2$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$Py \wedge Qy$}
\RightLabel{$\exists$I}
\UnaryInfC{$\exists x\,(Px \wedge Qx)$}
\RightLabel{$\exists$E, 1}
\BinaryInfC{$\exists x\,(Px \wedge Qx)$}
\RightLabel{$\to$I, 2}
\UnaryInfC{$Qy \to \exists x\,(Px \wedge Qx)$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\forall z\,(Qz \to \exists x\,(Px \wedge Qx))$}
\end{prooftree}
$$