Inleiding Logica

Deeltoets, dinsdag 12 oktober 2010, 17.00-20.00

Deze deeltoets is geloten boek. Hij bestaat uit 8 opgaven die even zwaar tellen. Er is ook een bonus-opgave, op de achterkant (Die mag gemaakt worden, en telt even zwaar, maar is niet nodig om een 10 te halen; maak hem alleen als u dat leuk vindt.)

Laat in de volgende opgaven A steeds de formule $\neg(p \wedge (\neg p \vee q))$ zijn.

Opgave 1. Gebruik de conventies voor het weglaten van haakjes om A zo kort mogelijk op te schrijven.

Teken de afleidingsboom van A.

Opgave 2. Geef de waarheidstafel van A.

Bereken stapsgewijs de waarheidswaarde van A onder de valuatie V met $V(p) = 0$ en $V(q) = 1$.

Opgave 3. Wanneer zeggen we dat een formule in conjunctieve normaalvorm is?

Converteer A stapsgewijs naar conjunctieve normaalvorm, waarbij per stap de gebruikte equivalentie aangegeven dient te worden.

Opgave 4. Geef een recursieve definitie van de functie h die voor iedere formule diens hoogte uitrekent, d.w.z. de maximale lengte van een pad van de wortel naar een blad de afleidingsboom van de formule. B.v. $h(p) = 1$, $h(\neg\neg\neg p) = 4$, $h(p \wedge \neg p) = 3$ (de hoogte wordt bereikt door in de afleidingsboom van de wortel $\wedge$ via $\neg$ naar p te lopen), en $h(A) = 5$ (voor A als boven gegeven).

Opgave 5. Wat betekent het dat een verzameling connectieven functioneel volledig is?

Stel we hebben een tweeplaatsig connectief $\Box$ met de volgende waarheidstafel:

p	q	$p \Box q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Is $\{\Box\}$ functioneel volledig? Toon ook aan *waarom* uw antwoord juist is.

Opgave 6. Leg uit wat het betekent dat een formule strijdig is, en waarom A al dan niet strijdig is.

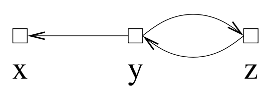
Stel we hebben een programma genaamd Y dat de vervulbaarheid van formules kan checken (b.v. als de formule onvervulbaar is dan geeft het programma `unsat` terug, en anders geeft het een vervullende valuatie terug). Leg uit hoe m.b.v. Y gecheckt kan worden of een formule strijdig is.

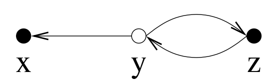
Opgave 7. Geef een natuurlijke deductiebewijs van $\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vdash \neg q \vee \neg p$, waarbij in iedere afleidingsstap de gebruikte afleidingsregel aangegeven wordt.

Opgave 8. Onderstreep de samentstellende proposities in de volgende samengestelde propositie:
Dit is de achtste opgave en acht is twee tot de derde en omdat dat een mooi getal is, stoppen we hier maar.

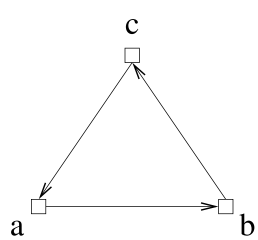
Opgave 9. Bonus (alleen voor liefhebbers van puzzelen).

Een *gerichte graaf* is een paar $G = \langle K, Z \rangle$ bestaande uit een verzameling K van *knopen* en een verzameling paren $Z \subseteq K \times K$ van *gerichte zijden* tussen knopen. Gegeven zo een gerichte graaf, zeggen we voor knopen $v, w \in K$ dat w een *opvolger* van v is als $\langle v, w \rangle \in Z$ (en d.w.z. als G een gerichte zijde van v naar w bevat). In de gerichte graaf in het eerste plaatje hieronder is bijvoorbeeld de knoop x een opvolger van de knoop y.
Laat $G = \langle K, Z \rangle$ een gerichte graaf zijn. Een *oplossing* van G is een valuatiefunctie $\alpha : K \to \{0, 1\}$ op de knopen van G die de volgende eigenschap heeft: α kent aan een knoop $v \in K$ de waarde 1 toe dan en slechts dan als α aan alle opvolgers w van v de waarde 0 toekent. We zeggen dat G *oplosbaar* is als er een oplossing voor G bestaat.
Voorbeeld. De gerichte graaf zoals in dit plaatje links:





is oplosbaar. Hij heeft als oplossing de valuatiefunctie α die in het plaatje rechts is aangeduid: hierbij geeft een zwart/wit rondje een knoop aan waaraan α de waarde 1/0 toekent. Bijvoorbeeld is de conditie aan α om oplossing te zijn geldig in de knoop z: we hebben $\alpha(z) = 1$, en dat voor alle opvolgers w van z in G (waarvan er alleen maar één is, namelijk de knoop y) geldt: $\alpha(w) = 0$.
Bekijk de gerichte graaf $H = \langle \{a, b, c\}, \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle\} \rangle$ bestaande uit een cykel ter lengte 3 die is geïllustreerd door dit plaatje:



Geef een propositionele formule φ die waar is dan en slechts dan als H oplosbaar is. Hiervoor construeer φ als een propositionele formule met drie propositionele variablen p_1, p_2, en p_3 die met de drie knopen van H corresponderen. Construeer φ als van de vorm $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ zó dat φ_1, φ_2, en φ_3 vertalingen zijn van de condities van een oplossing aan een valuatiefunctie $\alpha : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ voor respectievelijk de knopen a, b, en c.
Is φ waar, en daarom, is H oplosbaar?