

Inleiding Logica

Herkansingstoets, woensdag 2 december 2009, 9.00-12.00

Deze deeltoets is geloten boek. Hij bestaat uit 5 opgaven die ieder bestaan uit 2 gewone onderdelen. Opgave 4 heeft ook een (derde) bonusonderdeel. Met ieder onderdeel kan 1 punt behaald worden. Er zijn dus in totaal maximaal 11 punten te behalen. Het cijfer is het minimum van 10 en het aantal behaalde aantal punten. Motiveer altijd uw antwoord.

Opgave 1. Deze opgave betreft semantische tableaux voor propositie- en predikatenlogica.

(a) Bepaal of de propositionele formule $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$ een geldig gevolg is van $p \rightarrow q$, d.w.z. of $p \rightarrow q \models (p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$, met behulp van semantische tableaux. Geef aan hoe uw antwoord volgt uit het gevonden semantische tableau, en geef in het geval van een negatief antwoord ook een tegenmodel. Hetzelfde voor $(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \models p \rightarrow q$.

(b) De predikaatlogische formule $\forall x \exists y Rxy$ is duidelijk vervulbaar (er is b.v. een model met maar 1 element dat aan zichzelf gerelateerd wordt). Laat zien dat vervulbaarheid checken van deze formule m.b.v. de gewone kwantorregels voor semantische tableaux niet eindigt. Laat vervolgens zien dat vervulbaarheid checken wel eindigt voor de ster-regels voor de kwantoren, en geef het gevonden model. Verklaar ten slotte het verschil tussen beide.

Opgave 2. Deze opgave betreft de semantiek van propositie- en predikatenlogica.

(a) Geef een valuatie V die de beide propositionele formules $\phi = (p \rightarrow r) \vee ((\neg p) \rightarrow q)$ en $\psi = (p \leftrightarrow \neg r)$ waar maakt, en geef de berekeningen van $\bar{V}(\phi)$ en $\bar{V}(\psi)$ die dit aantonen. Leg uit wat het betekent dat twee formules logisch equivalent zijn, en laat zien dat ϕ en ψ niet logisch equivalent zijn.

(b) Beschouw een predikaatlogische vocabulaire $L = \langle C, V, P \rangle$ zonder constanten, d.w.z. $C = \emptyset$, met variabelen $V = \{x, y, z\}$, en predikaatsymbolen $P = \{R\}$ met R tweeplaatsig. En beschouw de volgende twee zinnen (gesloten formules):

- $\forall x \forall y \forall z (Rxy \rightarrow (Rxz \vee Rzy))$;
- $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$;

Geef drie *oneindige* modellen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ voor de vocabulaire L zodanig dat op \mathcal{M}_1 de eerste formule waar is maar de tweede niet, op \mathcal{M}_2 de tweede formule waar is maar de eerste niet, en op \mathcal{M}_3 beide formules waar zijn. (Dit mag d.m.v. plaatjes.) Bepaal formeel, d.w.z. met behulp van bedelingen, de onwaarheid van de tweede formule in uw model \mathcal{M}_1 .

Opgave 3. Deze opgave betreft de Boolese equivalenties in propositielogica en de syntax van predikatenlogica.

(a) Toon aan met behulp van Boolese equivalenties dat $(p \rightarrow r) \vee ((\neg p) \rightarrow q)$ een tautologie is. Geef de gehele transformatie en in iedere stap van de transformatie de naam van de gebruikte Boolese equivalentie (als die een naam heeft; b.v. associativiteit).

(b) Laat gegeven zijn dat $\forall x (\forall x P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x))$ een predikatenlogische formule is, die we aanduiden met ϕ . Geef een ontledingsboom van ϕ en geef daarin aan welke variabelen door kwantoren (en dan ook welke) gebonden worden. Kan de formule $\forall y (\forall x P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (P(y) \rightarrow Q(y))$ uit de formule ϕ verkregen door het herbenoemen van variabelen? Zo ja, geef de herbenoeming, zo nee, waarom niet.

Opgave 4. Deze opgave betreft de verbinding met natuurlijke taal van propositie- en predikatenlogica.

(a) Over een misdaad zijn de volgende gegevens over de (enig) mogelijke daders Abooksigun, Beatriz en Cedric bekend:

Er zijn minstens twee daders;

Als Abooksigun of Beatriz het gedaan heeft, dan Cedric niet.

Vertaal de twee beweringen naar proposities (U mag de verzameling propositionele variabelen waarin daderschap van de 3 personen uitgedrukt wordt zelf kiezen.) en bepaal de mogelijke dader(s).

(b) Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica, waar nodig gebruikmakend van gelijkheid. Domein: de verzameling honden. Vertaalsleutel: Vx : x vecht om een been, Hx : x gaat met het been heen. (U mag ervan uitgaan dat het steeds een en hetzelfde been betreft.)

- Als een hond vecht om een been dan is er ook een andere hond die om een been vecht.
- Er is hoogstens één hond die met het been heen gaat.
- Als twee honden vechten om een been dan gaat de derde ermee heen.

(c) Bonus.

Stel ik doe de uitspraak “Als je de toets haalt dan krijg je honderd euro van me of als je de toets niet haalt dan krijg je vijftig euro van me.” Beargumenteer dat ik m'n uitspraak, opgevat als formule in propositielogica (geef deze formule), altijd, d.w.z. of je de toets haalt of niet, waar kan maken zonder te betalen.

Opgave 5. Deze opgave betreft natuurlijke deductie voor propositie- en predikatenlogica.

(a) Geef een propositielogisch natuurlijke deductie afleiding van $p \vee q$ uit $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

(b) Leid $\exists x(Px \rightarrow Qx)$ af uit $\exists x Px \rightarrow \exists x Qx$ met behulp van natuurlijke deductie voor predikatenlogica.