24 oktober 2011

OPGAVEN VOOR HET PRACTICUM VAN 24 OKTOBER

INLEIDING LOGICA VOOR AI, 2011/2012

1. Inleiding

We werken weer met Jan Jaspars' tool. Een model is, in deze opgaven, altijd een model in Jaspars' universum. *Tenzij anders gespecificeerd, werken we met de taal met signatuur* $\langle\{H,P,K\},\emptyset,\mathsf{ar}\rangle$*, waar* $\mathsf{ar}(H)=\mathsf{ar}(P)=1$ *en* $\mathsf{ar}(K)=2$. In sommige gevallen zullen we constanten toevoegen en in sommige gevallen gebruiken we minder predikaatsymbolen. Dit wordt steeds expliciet vermeld. De *default* is de hierboven gegeven taal. U mag wel steeds identiteit $=$ gebruiken, tenzij anders gespecificeerd.

We bezien het volgende model $\mathcal{M}$:

- $D := \{\text{Arch}, \text{Fonz}, \text{Hank}\}$,
- $I(P) = \{\text{Arch}\}$,
- $I(H) = \{\text{Fonz}, \text{Hank}\}$,
- $I(K) = \{\langle\text{Arch}, \text{Arch}\rangle, \langle\text{Arch}, \text{Fonz}\rangle, \langle\text{Hank}, \text{Fonz}\rangle\}$.

Voer dit model in in de tool.

Om een wat prettiger representatie te krijgen van de eigenschappen en relaties schrijven we bijvoorbeeld:

H
Fonz
Hank

K	
Arch	Arch
Arch	Fonz
Fonz	Hank

Om $I(H)$, resp. $I(K)$ te specificeren. Dus de rijen geven de elementen, resp. de tupels. Merk op dat de volgorde van de rijen in de kolommen willekeurig is.

Voer nu de formule Kxy in in de tool en druk op de << knop. Het oranje lampje gaat branden en onder POS zie je:

x	y
Arch	Arch

.

Dit vertelt ons dat alle bedelingen met $f(x) = \text{Arch}$ en $f(y) = \text{Arch}$, de formule Kxy waar maken. De waarden van de andere variabelen dan x en y zijn voor de evaluatie van Kxy *don't care*. Die andere variabelen laat de tool dan ook niet zien.

Als we nu het drukken of POS een aantal malen herhalen vinden we achtereenvolgens:

x	y
Arch	Fonz

,

x	y
Hank	Fonz

,

x	y
Hank	Fonz

, ...

Zodra een bedeling zich herhaalt weten we dat we alle bedelingen f zodat $\mathcal{M}, f \models Kxy$ gehad hebben. We vinden dus dat een bedeling f de formule Kxy waarmaakt in $\mathcal{M}$ dan en slechts dan als ($f(x)$ = Arch en $f(y)$ = Arch) of ($f(x)$ = Arch en $f(y)$ = Fonz) of ($f(x)$ = Hank en $f(y)$ = Fonz). We kunnen dit inzicht in schema brengen als:

Kxy :

x	y
Arch	Arch
Arch	Fonz
Hank	Fonz

Vergelijk nu dit laatste schema met het schema dat we gebruikt hebben om $I(K)$ te representeren. Je kunt duidelijk zien dat het schema voor Kxy kan worden opgevat als representatie van $I(K)$. We laten bedelingen f met $fx = d$ en $fy = e$ in de verzameling bedelingen die Kxy waar maken corresponderen met paren $\langle d, e\rangle$ in $I(K)$.

We kunnen of deze manier ook andere relaties representeren. Bezie de formule $\exists z\,(Kxz \wedge Kzy)$, of, in Jan Jaspars' notatie, Ez(Kxz&Kzy). Voer deze formule in en vind de bijbehorende bedelingen die hem waarmaken. Dit geeft:

$\exists z\,(Kxz \wedge Kzy)$:

x	y
Arch	Arch
Arch	Fonz

We zeggen dat $\exists z\,(Kxz \wedge Kzy)$ de relatie gegeven door:

Arch	Arch
Arch	Fonz

definieert. We kiezen conventioneel x om het eerste argument te representeren en y om het tweede argument te representeren. Op dezelfde manier kan een formule met alleen x vrij een verzameling / eigenschap definiëren en een formule met x, y, z vrij een ternaire relatie.

2. Opgave 1: op het practicum doen

Bezie het model $\mathcal{M}$ uit Jaspars universum met het domein bestaande uit Arch, Luke en Hank, waarbij:
$I(H) = \{\text{Arch}\}$, $I(P) = \{\text{Hank}\}$, $I(K) = \{\langle \text{Arch}, \text{Luke}\rangle, \langle \text{Luke}, \text{Hank}\rangle\}$.

Welke eigenschappen of relaties worden gedefinieerd door de volgende formules?

a. Hx,

b. $\exists z\,(Hx \wedge Kxz \wedge Pz)$,

c. $\exists z\,(Hx \wedge Kyz \wedge Pz)$,

d. $\forall z\,(\exists y\,Kzy \to \exists y\,Kyx)$,

e. $\exists z\,(Kxz \wedge Kyz)$.

3. Opgave 2: op het practicum doen

We gebruiken het model van opgave 1.

a. Geef definities van de eigenschappen {Arch}, {Luke} en {Hank}, waarin alleen de predikaatsymbolen P en H voorkomen. Test uw definities met het programma.

b. Geef definities van de eigenschappen {Arch}, {Luke} en {Hank}, waarin alleen de predikaatsymbool K voorkomt. Test uw definities met het programma.

c. Geef een definitie van de volgende relatie:

Luke	Arch
Hank	Luke

Test de gevonden formule met het programma. Het is natuurlijk de sport om de formule zo simpel mogelijk te maken.

d. Geef een definitie van de volgende relatie:

Luke	Luke
Hank	Luke

Test de gevonden formule met het programma.

4. Opgave 3: op het practicum doen

Bezie het model $\mathcal{K}$ uit Jaspars universum met het domein bestaande uit Arch, Luke en Hank, waarbij: $I(H) = I(P) = \emptyset$, en
$I(K) = \{\langle \text{Arch}, \text{Luke}\rangle, \langle \text{Luke}, \text{Hank}\rangle, \langle \text{Hank}, \text{Arch}\rangle\}$.

a. Geef definities van {Arch}, {Luke} en {Hank}. U mag de constante a hierbij gebruiken. Test uw definities met het programma.

b. Kunnen we {Arch}, {Luke} en {Hank} ook definiëren zonder gebruik van een constante?

c. Geef een definitie van de volgende relatie.

Luke	Arch
Arch	Hank
Hank	Luke

Test de gevonden formule met het programma.

d. Geef een definitie waarin = niet voorkomt van de relatie *identiteit*, dat is de relatie:

Arch	Arch
Hank	Hank
Luke	Luke

Test de gevonden formule met het programma.

5. Opgave 3: thuis maken en inleveren op 31 oktober

Bezie het model $\mathcal{N}$ uit Jaspars universum met het domein bestaande uit Arch, Fonz, Luke en Hank, waarbij: $I(H) = I(P) = \emptyset$, en
$I(K) = \{\langle \text{Arch}, \text{Fonz}\rangle, \langle \text{Fonz}, \text{Hank}\rangle, \langle \text{Arch}, \text{Hank}\rangle, \langle \text{Luke}, \text{Arch}\rangle\}$.

a. Welke relaties worden gedefinieerd door de volgende formules: $\exists z\,(Kxz \wedge Kzy)$, $\exists z\,(\exists y(Kxy \wedge Kyz) \wedge Kzy)$?

b. Geef een definitie van een verzameling/ eigenschap met precies drie elementen.

c. Geef een definitie van de relatie:

Arch	Fonz
Arch	Hank
Fonz	Hank