College Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

31 oktober, 2011

Universiteit Utrecht

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

$\forall$E

De $\forall$-eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x\, A}{(A)[x := t]}\ \forall\mathrm{E}$$

We eisen dat t vrij is voor x in A.

$\forall$I

De $\forall$-introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x := y]}{\forall x\, A}\ \forall\text{I}$$

We eisen:

1. y is vrij is voor x in A,
2. y komt niet vrij voor in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x : y]$ op gebaseerd is,
3. hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$.

∃I

$$\frac{A[x := t]}{\exists x\, A}\ \exists\mathrm{I}$$

We eisen dat t substitueerbaar is voor x in A.

∃E

$$\dfrac{\exists x\, A \qquad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}\ \exists\mathrm{E}$$

1. y is substitueerbaar voor x in A.
2. In het rechter bewijsgedeelte ($A[x := y]/C$) geldt: y mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in $A[x := y]$, die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.
3. y is identiek aan x, of y komt niet vrij voor in A.
4. y mag niet vrij voorkomen in C.

Voorbeelden

1. $P \vee \forall x\, Qx \vdash \forall x\, (P \vee Qx)$,
2. $\forall x\, (P \vee Qx) \vdash P \vee \forall x\, Qx$

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

Equivalentierelaties

Zij R een binaire relatie op D.

- R is *reflexief* als, voor alle d in D, Rdd.
- R is *symmetrisch* als, voor alle d, e in D, als Rde, dan Red.
- R is *transitief* als, for alle c, d, e in D, als Rcd en Rde, dan Rce.
- R is een *equivalentierelatie* als R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Logische Equivalentie 1

A en B zijn *logisch equivalent* als $A \models B$ en $B \models A$.
We schrijven ook A Eq B.

Alternatief:

- A Eq B desda $\models A \leftrightarrow B$,
- A Eq B desda, voor alle $\mathcal{M}, f$ geldt:
  $\mathcal{M}, f \models A$ desda $\mathcal{M}, f \models B$.

STELLING: Logische equivalentie is een equivalentierelatie.

STELLING: Stel A Eq B. Bezie een formule C. Laat D het resultaat zijn van het vervangen van een aantal voorkomens van A in C door B. Dan C Eq D.

Voorbeeld

We laten zien dat $\forall x\, A$ Eq $\neg\, \exists x\, \neg\, A$. Bezie $\mathcal{M}, f$. We hebben:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, f \models \forall x\, A & \Leftrightarrow & \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x : d] \models A \\
& \Leftrightarrow & \text{voor alle } d \in D,\ \mathcal{M}, f[x : d] \not\models \neg A \\
& \Leftrightarrow & \text{niet er is een } d \text{ in } D \text{ met } \mathcal{M}, f[x : d] \not\models \neg A \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \not\models \exists x\, \neg A \\
& \Leftrightarrow & \mathcal{M}, f \models \neg\exists x\, \neg A
\end{array}
$$

Lijst

(i) $\forall x\, A$ Eq $\neg\exists x\, \neg A$

(ii) $\exists x\, A$ Eq $\neg\forall x\, \neg A$

(iii) $\neg\forall x\, A$ Eq $\exists x\, \neg A$

(iv) $\neg\exists x\, A$ Eq $\forall x\, \neg A$

(v) $\forall x\, \forall y\, A$ Eq $\forall y\, \forall x\, A$

(vi) $\exists x\, \exists y\, A$ Eq $\exists y\, \exists x\, A$

(vii) $\forall x\, A$ Eq $\forall y\, A[x := y]$ als y niet voorkomt in A

(viii) $\exists x\, A$ Eq $\exists y\, A[x := y]$ als y niet voorkomt in A

(ix) $\forall x\, A$ Eq A, als x niet vrij in A voorkomt

(x) $\exists x\, A$ Eq A, als x niet vrij in A voorkomt

(xi) $\forall x\, (A \wedge B)$ Eq $(\forall x\, A \wedge \forall x\, B)$

Lijst 2

a. $\exists x\,(A \vee B)$ Eq $(\exists x\, A \vee \exists x\, B)$
b. $(\forall x\, A \wedge B)$ Eq $\forall x\,(A \wedge B)$ als x niet vrij in B voorkomt.
c. $(A \wedge \forall x\, B)$ Eq $\forall x\,(A \wedge B)$ als x niet vrij in A voorkomt.
d. $(\exists x\, A \wedge B)$ Eq $\exists x\,(A \wedge B)$ als x niet vrij in B voorkomt.
e. $(A \wedge \exists x\, B)$ Eq $\exists x\,(A \wedge B)$ als x niet vrij in A voorkomt.
f. $(\forall x\, A \vee B)$ Eq $\forall x\,(A \vee B)$ als x niet vrij in B voorkomt
g. $(A \vee \forall x\, B)$ Eq $\forall x\,(A \vee B)$ als x niet vrij in A voorkomt
h. $(\exists x\, A \vee B)$ Eq $\exists x\,(A \vee B)$ als x niet vrij in B voorkomt
i. $(A \vee \exists x\, B)$ Eq $\exists x\,(A \vee B)$ als x niet vrij in A voorkomt

Lijst 3

A. $(\forall x\, A \to B)$ Eq $\exists x\, (A \to B)$ als x niet vrij in B voorkomt
B. $(A \to \forall x\, B)$ Eq $\forall x\, (A \to B)$ als x niet vrij in A voorkomt
C. $(\exists x\, A \to B)$ Eq $\forall x\, (A \to B)$ als x niet vrij in B voorkomt
D. $(A \to \exists x\, B)$ Eq $\exists x\, (A \to B)$ als x niet vrij in A voorkomt
E. $(\forall x\, A \leftrightarrow B)$ Eq $\exists x\, (A \to B) \wedge \forall x\, (A \to B)$ als x niet vrij in B voorkomt
F. $(A \leftrightarrow \forall x\, B)$ Eq $\forall x\, (A \to B) \wedge \exists x\, (B \to A)$ als x niet vrij in A voorkomt
G. $(\exists x\, A \leftrightarrow B)$ Eq $\forall x\, (A \to B) \wedge \exists x\, (B \to A)$ als x niet vrij in B voorkomt
H. $(A \leftrightarrow \exists x\, B)$ Eq $\exists x\, (A \to B) \wedge \forall x\, (B \to A)$ als x niet vrij in A voorkomt

Overview

Natuurlijke Deductie

Logische Equivalentie

Prenex Normaal Vorm

PNF1

We kunnen altijd met *verse* variabelen werken.

Voor elke formule A is er een formule B, zodat A Eq B en elke variabele in B uniek is, dat betekent dat (i) geen variabele zowel vrije als gebonden voorkomens heeft en (ii) geen twee kwantorenvoorkomens dezelfde variabele (qua type) binden.

Een formule A staat in (is een) *prenex normaalvorm*, als hij bestaat uit een (eventueel leeg) rijtje kwantoren, gevolgd door een open formule (d.i. een formule zonder kwantoren). We noemen A dan wel een prenex formule.

Elke formule is equivalent met een prenex formule.

PNF2

We construeren een prenex normaalvorm van:
$\forall x\, Px \to \exists x\, \forall y\, (Rxy \vee \exists y Rxy)$.

$$
\begin{array}{lll}
\forall x\, Px \to \exists x\, \forall y\, (Rxy \vee \exists y\, Rxy) & \text{Eq} & \forall x\, Px \to \exists u \forall v\, (Ruv \vee \exists w\, Ruw) \\
 & \text{Eq} & \exists x\, (Px \to \exists u \forall v\, (Ruv \vee \exists w\, Ruw)) \\
 & \text{Eq} & \exists x\, \exists u\, (Px \to \forall v\, (Ruv \vee \exists w\, Ruw)) \\
 & \text{Eq} & \exists x\, \exists u \forall v\, (Px \to (Ruv \vee \exists w\, Ruw)) \\
 & \text{Eq} & \exists x\, \exists u \forall v\, (Px \to \exists w\, (Ruv \vee Ruw)) \\
 & \text{Eq} & \exists x\, \exists u \forall v\, \exists w\, (Px \to (Ruv \vee Ruw))
\end{array}
$$