

# College Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

31 oktober, 2011

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



Universiteit Utrecht

# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# $\forall E$

De  $\forall$ -eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x A}{(A)[x := t]} \forall E$$

We eisen dat  $t$  vrij is voor  $x$  in  $A$ .

Wat er mis gaat als we dit niet eisen, wordt onmiddellijk duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Goed:

$$\frac{\forall x \exists y x < y}{\exists y z < y} \forall E$$

Fout:

$$\frac{\forall x \exists y x < y}{\exists y y < y} \forall E$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden





# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

**Natuurlijke Deductie  $\forall I$**

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

**Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$**

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



De  $\forall$ -introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x := y]}{\forall x A} \quad \forall I$$

We eisen:

1.  $y$  is vrij is voor  $x$  in  $A$ ,
2.  $y$  komt niet vrij voor in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie  $A[x : y]$  op gebaseerd is,
3. hetzij  $y$  is identiek aan  $x$  of  $y \notin FV(A)$ .

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Voorwaarde 1+ 2

$y$  is vrij is voor  $x$  in  $A$

$$\frac{\frac{\forall x \exists y x \neq y}{\exists y x \neq y} \forall E}{\exists y y \neq y} \forall I$$

Fout:

$y$  komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie  $A[x : y]$  op gebaseerd is.

$$\frac{Py \quad \frac{\forall x (Px \rightarrow Qx)}{Py \rightarrow Qy} \forall E}{Qy} \rightarrow E$$
$$\frac{Qy}{\forall x Qx} \forall I$$

Fout:

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Voorwaarde 3

Hetzij  $y$  is identiek aan  $x$  of  $y \notin FV(A)$ .

Fout:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x Rxx}{Rzz} \forall E}{\forall x Rxz} \forall I}{\forall y \forall x Rxy} \forall I$$

$$A = Rxz, A[x := z] = Rzz.$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



$$\frac{A[x := t]}{\exists x A} \exists I$$

We eisen dat  $t$  substitueerbaar is voor  $x$  in  $A$ .

Fout:

$$\frac{\exists x \forall y Rxy}{\forall y Ryy} \forall I$$

$$A = \forall y Pxy, A[x := y] = \forall y Pyy.$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



$$\begin{array}{c}
 [A[x := y]] \\
 \triangle \\
 \frac{\exists x A \quad C}{C} \exists E
 \end{array}$$

1.  $y$  is substitueerbaar voor  $x$  in  $A$ .
2. In het rechter bewijsgedeelte ( $A[x := y]/C$ ) geldt:  $y$  mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in  $A[x := y]$ , die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.
3.  $y$  is identiek aan  $x$ , of  $y$  komt niet vrij voor in  $A$ .
4.  $y$  mag niet vrij voorkomen in  $C$ .

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden





# conditie 1

$y$  is vrij voor  $x$  in  $A$ .

Fout:

$$\frac{\exists x \forall y Px \quad [\forall y Py]^1}{\forall y Py} \quad \exists E, 1$$

$A := \forall y Px, A[x := y] = \forall y Py$ .

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



## conditie 2

In het rechter bewijsgedeelte ( $A[x := y]/C$ ) geldt:  $y$  mag niet vrij voorkomen in een hypothese, anders dan in  $A[x := y]$ , die op het moment dat de regel wordt toegepast nog niet is ingetrokken.

Fout:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\exists x Px}{\exists x Px}}{\exists x Px}}{\exists x Px}}{\exists x Px} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{[Py]^2 \quad [Qy]^1}{Py \wedge Qy} \wedge I}{\exists x Qx} \exists I}{\exists x (Px \wedge Qx)} \exists E, 1}}{\exists x (Px \wedge Qx)} \exists E, 2}}{\exists x (Px \wedge Qx)} \exists E, 2$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# conditie 3

$y$  is identiek aan  $x$ , of  $y$  komt niet vrij voor in  $A$ .

Fout:

$$\frac{\exists x x \neq y \quad \frac{[y \neq y]^1}{\exists x x \neq x} \exists I}{\exists x x \neq x} \exists E, 1$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# conditie 4

$y$  mag niet vrij voorkomen in  $C$ .

Fout:

$$\frac{\exists x Px \quad [Px]^1}{\frac{Px}{\forall x Px} \forall I} \exists E, 1$$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Overview

Natuurlijke Deductie  $\forall E$

Natuurlijke Deductie  $\forall I$

Natuurlijke Deductie  $\exists I$

Natuurlijke Deductie  $\exists E$

Voorbeelden

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden



# Voorbeelden

1.  $\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall x (Qx \rightarrow Rx) \vdash \forall x (Px \rightarrow Rx)$
2.  $\forall x (Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x Px \rightarrow \forall x Qx$
3.  $\forall x (Px \rightarrow Qx), \neg \forall x Qx \vdash \neg \forall x Px$
4.  $\forall x (Px \rightarrow Qx), \exists x Px \vdash \exists x Qx$
5.  $\forall x (Px \vee Qx) \vdash \exists x Px \vee \exists x Qx$
6.  $\forall x Px \vee \exists x Qx \vdash \exists x (Px \vee Qx)$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall E$

Natuurlijke Deductie  
 $\forall I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists I$

Natuurlijke Deductie  
 $\exists E$

Voorbeelden

