College Logica voor CKI

Albert Visser

Department of Philosophy, Faculty Humanities, Utrecht University

26 oktober, 2011

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Interpretatie van Complexe Formules

sem0	$\mathcal{M}, f \models Pt_1 \dots t_n$	$\Leftrightarrow$	$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},f}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},f} \rangle \in I(P)$
sem$\bot$	$\mathcal{M}, f \models \bot$	$\Leftrightarrow$	0=1
sem$\neg$	$\mathcal{M}, f \models \neg B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models B$
sem$\wedge$	$\mathcal{M}, f \models A \wedge B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\vee$	$\mathcal{M}, f \models A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\rightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \not\models A$ of $\mathcal{M}, f \models B$
sem$\leftrightarrow$	$\mathcal{M}, f \models A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$[\mathcal{M}, f \models A$ en $\mathcal{M}, f \models B]$ of $[\mathcal{M}, f \not\models A$ en $\mathcal{M}, f \not\models B]$
sem$\forall$	$\mathcal{M}, f \models \forall x\, A$	$\Leftrightarrow$	voor alle $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$
sem$\exists$	$\mathcal{M}, f \models \exists x\, A$	$\Leftrightarrow$	er is een $d \in D$, $\mathcal{M}, f[x : d] \models A$

Als $n = 0$ in sem0, dan is het rijtje $\langle t_1, \dots, t_n \rangle = \langle\, \rangle = \varepsilon$.

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

Definitie van Geldigheid

Zij een signatuur Σ gegeven.

(i) $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ desda $\mathcal{M}, f \models C$ voor alle $C \in \Gamma$.

(ii) $\Gamma \models A$ desda, voor alle $\mathcal{M}$ in Mod_Σ en voor alle bedelingen f over het domein van $\mathcal{M}$, we hebben $\mathcal{M}, f \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, f \models A$.

(iii) $A_1, \ldots, A_n \models B$ desda $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$

(iv) $\models A$ desda $\emptyset \models A$.

Universiteit Utrecht

Strijdigheid en Vervulbaarheid

Een verzameling formules Γ is *vervulbaar* of *semantisch consistent* dan en slechts dan als er een model $\mathcal{M}$ is en een bedeling f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$.

Een verzameling formules Γ is of *semantisch inconsistent* dan en slechts dan als er geen model $\mathcal{M}$ is een geen bedeling f is, zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$. Met andere woorden: Γ is strijdig dan en slechts dan als Γ niet vervulbaar is.

Correctheid en Volledigheid

Correctheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$.

We kunnen de correctheidsstelling ook als volgt formuleren (m.b.v. contrapositie): $\Gamma \not\models A \Rightarrow \Gamma \nvdash A$.

Dit zegt dat als we een tegenvoorbeeld tegen de redenering Γ / A vinden, we daarmee tevens hebben aangetoond dat A niet met natuurlijke deductie uit Γ af te leiden is.

Volledigheidsstelling voor de predikatenlogica: $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.
(Gödel, 1930)

We kunnen de volledigheidsstelling herformuleren tot het Model Existentie Lemma:
Als $\Gamma \nvdash A$, dan is er een model $\mathcal{M}$ en een valuatie f zodat $\mathcal{M}, f \models \Gamma$ en $\mathcal{M}, f \not\models A$.

Overview

Interpretatie van de Predikatenlogische Taal

Geldigheid

Natuurlijke Deductie

∀E

De ∀-eliminatie regel ziet er zo uit.

$$\frac{\forall x\, A}{(A)[x := t]}\ \forall E$$

We eisen dat t vrij is voor x in A.

Wat er mis gaat als we dit niet eisen, wordt onmiddellijk duidelijk uit het volgende voorbeeld:

Goed: $$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, z < y}\ \forall E$$

Fout: $$\frac{\forall x\, \exists y\, x < y}{\exists y\, y < y}\ \forall E$$

$\forall$I

De $\forall$-introductieregel regel ziet er zo uit.

$$\frac{A[x:y]}{\forall x\, A}\ \forall\mathrm{I}$$

We eisen:

1. y is vrij is voor x in A,
2. y komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x:y]$ op gebaseerd is,
3. hetzij y is identiek aan x of $y \notin \mathrm{FV}(A)$.

Voorwaarde 1+ 2

y is vrij is voor x in A

Fout:

$$\cfrac{\cfrac{\forall x\, \exists y\; x \neq y}{\exists y\; x \neq y}\;\forall\mathrm{E}}{\exists y\; y \neq y}\;\forall\mathrm{I}$$

y komt niet vrij in een nog openstaande aanname waar de deelconclusie $A[x : y]$ op gebaseerd is.

Fout:

$$\cfrac{\cfrac{Py \qquad \cfrac{\forall x\,(Px \rightarrow Qx)}{Py \rightarrow Qy}\;\forall\mathrm{E}}{Qy}\;{\rightarrow}\mathrm{E}}{\forall x\; Qx}\;\forall\mathrm{I}$$

Voorwaarde 3

Hetzij y is identiek aan x of $y \notin FV(A)$.

Fout:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, Rxx}{Rzz}\,\forall E}{\forall x\, Rxz}\,\forall I}{\forall y\, \forall x\, Rxy}\,\forall I$$