Volledigheidsstelling

- (B is een semantisch gevolg van $A_1,\ldots,A_n$) dan en slechts dan (als B afleidbaar uit $A_1,\ldots,A_n$)
- $A_1,\ldots,A_n \models B$ dan en slechts dan als $A_1,\ldots,A_n \vdash B$
- $\models$ = $\vdash$ (semantiek vs. syntax)
- $\models$ als $\vdash$ (correctheid, soundness)
- $\models$ dan $\vdash$ (volledigheid, completeness)

Correctheid

- Verzameling afleidingsbomen inductief gedefd
- Schema's voor connectieven als constructies
- als $A_1,\ldots,A_n \vdash B$ dan $A_1,\ldots,A_n \models B$, bewijs met inductie naar de afleidingsboom
- v.b. $A_1,\ldots,A_n \vdash B \wedge C$

Volledigheid

- als $A_1,\ldots,A_n \models B$ dan $\models A_1 \rightarrow \ldots. \rightarrow A_n \rightarrow B$
- als $\models A_1 \rightarrow \ldots. \rightarrow A_n \rightarrow B$ dan $A_1 \rightarrow \ldots. \rightarrow A_n \rightarrow B$ Eq $\top$ (afko van $\neg\bot$)
- om C Eq D aan te tonen hebben we een eindig aantal equivalentieschema's nodig (die in de reader)
- voldoende om voor ieder schema C Eq D te laten zien $C \vdash D$ en $D \vdash C$

Equivalentie

A en B zijn equivalent als
B een semantisch gevolg
is van A en andersom

A Eq B als $A \models B$ en $B \models A$

Mbv de volledigheidsstelling volgt

A Eq B als $A \vdash B$ en $B \vdash A$

Dus is het een goede oefening om van
de eerdere equivalenties A Eq B te kijken
of je zowel $A \vdash B$ als $B \vdash A$ kunt bewijzen

Afleiden equivalenties

$$
\begin{array}{rcl}
\neg A & \text{Eq} & \neg A \\
(A \vee B) & \text{Eq} & (A \vee B) \\
(A \wedge B) & \text{Eq} & \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(A \rightarrow B) & \text{Eq} & (\neg A \vee B) \\
(A \leftrightarrow B) & \text{Eq} & ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\
 & \text{Eq} & ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \\
 & \text{Eq} & \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))
\end{array}
$$

(blz 74 syllabus)

Nog enige equivalenties

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A$ Eq A
- $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B)$ Eq $(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \wedge A$ Eq A
- $A \vee A$ Eq A