Substitutie

- ik word nat omdat het regent
- (ik word nat omdat het regent)[het regent:=ik onder de douche sta]
- ik word nat omdat ik onder de douche sta
- q omdat p
- (q omdat p)[p:=p’] = q omdat p’
- `omdat’ is niet waarheidsdefiniet

Substitutie recursief (Def 3.13)

- $(p_i)[p_i{:=}C] := C$
- $(p_{j)}[p_i{:=}C] := p_j$ als i ongelijk j
- $(\perp)[p_i{:=}C] := \perp$
- $(\neg A)[p_i{:=}C] := \neg(A)[p_i{:=}C]$
- $(A\square B)[p_i{:=}C] := (A[p_i{:=}C]\square B[p_i{:=}C])$

Substitutiestelling

- vervanging van een deelformule door een equivalente formule verandert waarheidswaarde niet
- als $V(A) = V(B)$ dan $V((C)[p_i{:=}A]) = V((C)[p_i{:=}B])$
- bewijs? met inductie over C

Vervangen door Equivalenten(Herschrijven)

Stelling 3.14: Het vervangen van een formule door een equivalente verandert de valuatie/waarheidstafel niet.

Equivalentie

A en B zijn equivalent als
B een semantisch gevolg
is van A en andersom

A Eq B als $A \models B$ en $B \models A$

A Eq B als voor alle valuaties V, V(A) = V(B)

A Eq B als A en B dezelfde waarheidstafel hebben

Equivalentie

- $(A \leftrightarrow B)$ Eq $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B)$ Eq $(\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A$ Eq A
- $\neg(A \wedge B)$ Eq $(\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B)$ Eq $(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C)$ Eq $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \wedge A$ Eq A
- $A \vee A$ Eq A

Herschrijven $\rightsquigarrow$

- $(A \leftrightarrow B) \rightsquigarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow (\neg A \vee B)$
- $\neg\neg A \rightsquigarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge (B \vee C) \rightsquigarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $(B \vee C) \wedge A \rightsquigarrow (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$
- $A \wedge A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)
- $A \vee A \rightsquigarrow A$ (niet nodig voor DNV)

Normaalvormen

Definitie: Formule is in/een disjunctieve normaalvorm (DNV) als hij niet verder herschreven kan worden

Stelling: de formule A is in DNV dan en slechts dan als in de afleidingsboom disjuncties alleen boven conjuncties, en conjuncties alleen boven negaties voorkomen

Herschrijven voorbeeld

$$(\neg p \leftrightarrow q) \rightsquigarrow$$

$$((\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$
$$((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow$$
$$((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$
$$(((p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((p \vee q) \wedge \neg p)) \rightsquigarrow\rightsquigarrow$$
$$(((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)))$$

Functionele Volledigheid

Stelling: voor iedere waarheidstafel is er een formule die die als waarheidstafel heeft