

Een paar oefeningen in Verzamelingenleer

Yoad Winter

February 8, 2012

1. Bewijs: voor alle $A, B \subseteq E$: $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.
2. Bewijs: voor alle $A, B \subseteq E$: $\wp(A \cup B) \supseteq \wp(A) \cup \wp(B)$.
3. Bewijs: Er bestaan $A, B \subseteq E$ zodanig dat $\wp(A \cup B) \not\subseteq \wp(A) \cup \wp(B)$.
4. Conclusie: niet voor alle $A, B \subseteq E$: $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$.
5. Bewijs: voor een functie $f : E \rightarrow E$ en $A \subseteq B \subseteq E$: $f[A] \subseteq f[B]$.
6. Bewijs: voor functies $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow Z$ en een verzameling $A \subseteq X$:
 $(f \circ g)[A] = f[g[A]]$.

Oplossing 2:

Stel: $X \in \wp(A) \cup \wp(B)$
 $\Rightarrow X \in \wp(A)$ of $X \in \wp(B)$ (def. \cup)
 $\Rightarrow X \subseteq A$ of $X \subseteq B$ (def. \wp)
 $\Rightarrow \forall x \in X[x \in A]$ of $\forall x \in X[x \in B]$ (def. \subseteq)
 $\Rightarrow \forall x \in X[x \in A$ of $x \in B]$ (triviaal)
 $\Rightarrow \forall x \in X[x \in A \cup B]$ (def. \cup)
 $\Rightarrow X \subseteq A \cup B$ (def. \subseteq)
 $\Rightarrow X \in \wp(A \cup B)$ (def. \wp)

Conclusie: $\wp(A \cup B) \supseteq \wp(A) \cup \wp(B)$.

Voorbeeld 3:

Stel: $E = \{a, b\}, a \neq b, A = \{a\}, B = \{b\}$
 $\Rightarrow \forall x \in E[x \in A$ of $x \in B]$ (def. A, B, E)
 $\Rightarrow \forall x \in E[x \in A \cup B]$ (def. \cup)
 $\Rightarrow E \subseteq A \cup B$ (def. \subseteq)
 $\Rightarrow E \in \wp(A \cup B)$ (def. \wp)

Maar: $b \notin A$ en $a \notin B$ (def. A, B)
 $\Rightarrow \neg \forall x \in E[x \in A]$ en $\neg \forall x \in E[x \in B]$ (def. E)
 $\Rightarrow E \not\subseteq A$ en $E \not\subseteq B$ (def. \subseteq)
 $\Rightarrow E \notin \wp(A)$ en $E \notin \wp(B)$ (def. \wp)
 $\Rightarrow \neg[E \in \wp(A)$ of $E \in \wp(B)]$ (triviaal)
 $\Rightarrow \neg[E \in \wp(A) \cup \wp(B)]$ (def. \cup)

Dus: We hebben A, B, E gevonden zodanig dat:
 $E \in \wp(A \cup B)$ maar $E \notin \wp(A) \cup \wp(B)$.

Conclusie: $\wp(A \cup B) \subseteq \wp(A) \cup \wp(B)$ geldt niet altijd.